

La probabilitat: una eina per a modelar la incertesa

Xavier Bardina

Departament de Matemàtiques, UAB

Figueres, 12 de març de 2022



Resum

1 Introducció

Una mica d'història

Els primers jocs aleatoris: els tali i els daus

Origen de la teoria: les cartes entre Pascal i Fermat

2 Combinatòria: l'art de saber comptar

La regla de Laplace

Escollir en una classe

El problema de l'aniversari

Preguntes del Chevalier de la Méré

El problema de Monty Hall

La 6/49 o la primitiva

3 Esperança matemàtica

Definició d'esperança matemàtica

La ruleta

Jugar a la martingala

Mercats financers

- Els humans sempre han temut la incertesa que governa les seves vides.
- Avui farem un passeig per les reaccions davant de l'aleatorietat, des dels vells temps passats fins a la matematització que representa la teoria de la probabilitat.
- Considerarem algunes preguntes que ja apareixen a la correspondència entre Pascal i Fermat, en el naixement de la teoria, així com alguns dels problemes clàssics, com el famós problema de les tres portes, l'aposta a la martingala i acabarem veient com funcionen les opcions de compra dels mercats financers.

No hem d'estranyar-nos que l'atzar pugui tant sobre nosaltres, si considerem el fet que vivim i som per atzar.

(Sèneca)



El primer sorteig de la nostra vida: 1 entre 80 milions!

Els primers jocs aleatoris: els tali i els daus.



Els tali



S'obtenien d'un os del taló anomenat astragalus. **Tenen quatre cares no iguals, a les quals se'ls donava puntuacions 1, 3, 4, 6.** La jugada més valorada era treure aquesta sèrie de puntuacions: s'anomenava **Venus**. **La més desfavorable, obtenir quatre uns: gos.** En una tomba egípcia del 3500 a.C. hi ha pintats un home i una dona jugant-hi.

Els daus

Els daus més antics que es coneixen (3000 aC) han estat trobats a Shahr-i-Sokhta (Iran). Són els que esmostren a la figura. Els romans eren molt aficionats a jugar-hi. A l'època medieval també s'hi jugava molt. Al llarg de la història han estat prohibits diverses vegades



Origen de la teoria de la probabilitat

El naixement de la teoria de la probabilitat es produeix al segle XVII, amb la breu correspondència entre Fermat i Pascal, que dura del juny/juliol fins al setembre/octubre de 1654, motivada per les preguntes que un jugador aristòcrata, el Chevalier de la Méré, fa a Pascal.



Fermat



Pascal

“No tinc temps d’enviar la demostració d’una dificultat que va sorprendre moltíssim el senyor de la Méré, perquè té molt bona ment, però no és matemàtic, i això, com sabeu, és un gran defecte.”

(Pascal)

“La probabilitat no és res més que el sentit comú aplicat al càlcul.”

(Laplace)

La regla de Laplace



Quan en un **experiment aleatori** es pot considerar que tots els diferents resultats tenen la mateixa probabilitat, **per exemple, al llençar un dau equilibrat totes les cares tenen la mateixa probabilitat**, s'utilitza la regla de Laplace

$$P = \frac{\text{nombre casos favorables}}{\text{nombre casos possibles}}.$$

Per tant per poder calcular probabilitats cal saber comptar!

A la província de Girona: hi ha dues persones que tenen exactament el mateix número de cabells?



Al cap hi tenim entre 80.000 i 150.000 cabells. La província de Girona té 753.054 habitants. Per tant,
Segur que hi ha almenys dues persones amb exactament el mateix número de cabells!

A la província de Girona: hi ha dues persones que tenen exactament el mateix número de cabells?



Al cap hi tenim entre 80.000 i 150.000 cabells. La província de Girona té 753.054 habitants. Per tant, Segur que hi ha almenys dues persones amb exactament el mateix número de cabells!

A la província de Girona: hi ha dues persones que tenen exactament el mateix número de cabells?



Al cap hi tenim entre 80.000 i 150.000 cabells. La província de Girona té 753.054 habitants. Per tant,
Segur que hi ha almenys dues persones amb exactament el mateix número de cabells!

En una classe amb 25 alumnes, de quantes formes diferents poden...

Elegir un delegat?

25

Elegir un delegat i un sotsdelegat?

$$25 \times 24 = 600$$

Elegir dos representants per una reunió?

$$\frac{25 \times 24}{2} = \binom{25}{2} = \frac{25!}{2!(25-2)!} = 300$$

Seure a la classe?

$$25 \times 24 \times 23 \times \cdots \times 2 \times 1 = 25! = 15_4511.210_3043.330_2985.984_1000.000$$



En una classe amb 25 alumnes, de quantes formes diferents poden...

Elegir un delegat?

25

Elegir un delegat i un sotsdelegat?

$$25 \times 24 = 600$$

Elegir dos representants per una reunió?

$$\frac{25 \times 24}{2} = \binom{25}{2} = \frac{25!}{2!(25-2)!} = 300$$

Seure a la classe?

$$25 \times 24 \times 23 \times \cdots \times 2 \times 1 = 25! = 15_4511.210_3043.330_2985.984_1000.000$$



En una classe amb 25 alumnes, de quantes formes diferents poden...

Elegir un delegat?

25

Elegir un delegat i un sotsdelegat?

$$25 \times 24 = 600$$

Elegir dos representants per una reunió?

$$\frac{25 \times 24}{2} = \binom{25}{2} = \frac{25!}{2!(25-2)!} = 300$$

Seure a la classe?

$$25 \times 24 \times 23 \times \cdots \times 2 \times 1 = 25! = 15_4511.210_3043.330_2985.984_1000.000$$



En una classe amb 25 alumnes, de quantes formes diferents poden...

Elegir un delegat?

25

Elegir un delegat i un sotsdelegat?

$$25 \times 24 = 600$$



Elegir dos representants per una reunió?

$$\frac{25 \times 24}{2} = \binom{25}{2} = \frac{25!}{2!(25-2)!} = 300$$

Seure a la classe?

$$25 \times 24 \times 23 \times \dots \times 2 \times 1 = 25! = 15_4511.210_3043.330_2985.984_1000.000$$

En una classe amb 25 alumnes, de quantes formes diferents poden...

Elegir un delegat?

25

Elegir un delegat i un sotsdelegat?

$$25 \times 24 = 600$$

Elegir dos representants per una reunió?

$$\frac{25 \times 24}{2} = \binom{25}{2} = \frac{25!}{2!(25-2)!} = 300$$

Seure a la classe?

$$25 \times 24 \times 23 \times \dots \times 2 \times 1 = 25! = 15_4511.210_3043.330_2985.984_1000.000$$



En una classe amb 25 alumnes, de quantes formes diferents poden...

Elegir un delegat?

25

Elegir un delegat i un sotsdelegat?

$$25 \times 24 = 600$$

Elegir dos representants per una reunió?

$$\frac{25 \times 24}{2} = \binom{25}{2} = \frac{25!}{2!(25-2)!} = 300$$

Seure a la classe?

$$25 \times 24 \times 23 \times \cdots \times 2 \times 1 = 25! = 15_4511.210_3043.330_2985.984_1000.000$$



En una classe amb 25 alumnes, de quantes formes diferents poden...

Elegir un delegat?

25

Elegir un delegat i un sotsdelegat?

$$25 \times 24 = 600$$

Elegir dos representants per una reunió?

$$\frac{25 \times 24}{2} = \binom{25}{2} = \frac{25!}{2!(25-2)!} = 300$$

Seure a la classe?

$$25 \times 24 \times 23 \times \cdots \times 2 \times 1 = 25! = 15_4511.210_3043.330_2985.984_1000.000$$



En una classe amb 25 alumnes, de quantes formes diferents poden...

Elegir un delegat?

$$25$$

Elegir un delegat i un sotsdelegat?

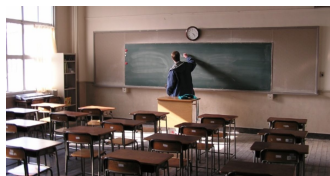
$$25 \times 24 = 600$$

Elegir dos representants per una reunió?

$$\frac{25 \times 24}{2} = \binom{25}{2} = \frac{25!}{2!(25-2)!} = 300$$

Seure a la classe?

$$25 \times 24 \times 23 \times \cdots \times 2 \times 1 = 25! = 15_4511.210_3043.330_2985.984_1000.000$$



En una classe amb 25 alumnes, de quantes formes diferents poden...

Elegir un delegat?

$$25$$

Elegir un delegat i un sotsdelegat?

$$25 \times 24 = 600$$

Elegir dos representants per una reunió?

$$\frac{25 \times 24}{2} = \binom{25}{2} = \frac{25!}{2!(25-2)!} = 300$$

Seure a la classe?

$$25 \times 24 \times 23 \times \cdots \times 2 \times 1 = 25! = 15_4 511.210_3 043.330_2 985.984_1 000.000$$



Quants anys trigarem en llegir aquest llibre de només 10 pàgines?



Quina és la probabilitat que en un grup de n persones n'hi hagi almenys dues que celebrin l'aniversari el mateix dia?

Suposem que un any té 365 dies.

Les n persones poden celebrar els seus aniversaris de 365^n maneres diferents. Aleshores,

$$P(\text{alguna coincidència}) = 1 - P(\text{cap coincidència}).$$

Aplicant la regla de Laplace

$$P(\text{alguna coincidència}) = 1 - \frac{365 \times 364 \times 363 \times \cdots \times (365 - n + 1)}{365^n}$$

Si calculem aquesta probabilitat per a diferents valors de n , veiem en la taula següent que, si hi ha 23 persones, la probabilitat de trobar alguna coincidència és ja més gran que $\frac{1}{2}$:

n	p		n	p
5	0,0027		25	0,569
10	0,117		30	0,706
20	0,411		50	0,970
22	0,476		60	0,994
23	0,507		100	0,9999997

Exemple: en un partit de futbol hi ha...

- 22 jugadors titulars
- 2 entrenadors
- àrbitres

Agafem l'acta del darrer Barça-Madrid de lliga, jugat el 24/10/2021, i busquem els aniversaris de tots ells:



Fitxa del Barça-Madrid del 24 d'octubre de 2021

Barcelona

- 1 Ter Stegen
- 2 DEST
- 3 Piqué
- 5 Sergio
- 9 MEMPHIS
- 10 Fati
- 18 Jordi Alba
- 21 De Jong
- 22 Mingueza
- 24 ERIC
- 30 Paez

ENTRENADOR

Koeman, Ronald

SUSTITUCIONES

- | | |
|----------------|---|
| 14 COUTINHO | ← |
| Mingueza (46') | → |
| 19 KUN AGÜERO | ← |
| Fati (74') | → |
| 20 S. Roberto | ← |
| De Jong (77') | → |
| 17 De Jong | ← |
| Paez (85') | → |



1



2

ÁRBITROS

Principal: Sánchez Martínez, José María
Asistente: Cabañero Martínez, Raúl
Asistente: Gallego García, José
4º Arbitro: Martínez Montalban, José David
 : González González, José Luis
 : Iglesias Villanueva, Ignacio

GOLES

- 0-1 ALABA (32')
 1-1 KUN AGÜERO (90')
 1-2 Lucas V. (90')

TARJETAS

- Piqué (58') ■ Mendy (80')

ESTADIO: Camp Nou



Ciudad: Barcelona

Fecha: 24 de octubre de 2021

Real Madrid

- 1 Courtois
- 3 E. Militão
- 4 ALABA
- 8 Kroos
- 9 Benzema
- 10 Modric
- 14 Casemiro
- 17 Lucas V.
- 20 Vinicius José
- 21 Silva De Goes
- 23 Mendy

ENTRENADOR

Anelotti, Carlo

SUSTITUCIONES

- | | |
|---------------------|---|
| 15 Valverde | ← |
| Silva De Goes (72') | → |
| 11 Asensio | ← |
| Vinicius José (87') | ← |
| 2 Carvajal | ← |
| Valverde (90') | → |

Aniversaris Barça-Madrid 24 d'octubre de 2021

Sánchez, JM	3 d'octubre			
Cabañero, Raúl	28 d'agost		Gallego García, J	17 d'agost
Koeman, Ronald	21 de març		Ancelotti, Carlo	10 de juny
Ter Stegen, MA	30 d'abril		Thibaut Courtois	11 de maig
Dest, Sergiño	3 de novembre		Éder Militão	18 de gener
Pique, Gerard	2 de febrer		David Alaba	24 de juny
Busquets, Sergio	16 de juliol		Toni Kroos	4 de gener
Memphis Depay	13 de febrer		Karim Benzema	19 de desembre
Ansu Fati	31 d'octubre		Luka Modric	9 de setembre
Jordi Alba	21 de març		Casemiro	23 de febrer
Frenkie de Jong	12 de maig		Lucas Vázquez	1 de juliol
Óscar Mingueza	13 de maig		Vinicius Jr	12 de juliol
Eric García	9 de gener		Rodrygo Silva	9 de gener
Gavi	5 d'agost		Ferland Mendy	8 de juny

Quina és la probabilitat que si estic en un grup de n persones n'hi hagi almenys una altra que faci l'aniversari el mateix dia que jo?

Aquesta situació és molt diferent!

En aquest cas

$$p = 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^{n-1}$$

i fan falta $n = 254$ persones per a que aquesta probabilitat sigui més gran que $\frac{1}{2}$. Concretament, amb $n = 254$ s'obté $p = 0,5005$.

És avantatjós apostar que almenys obtindrem un sis si llancem un dau quatre cops?

Aquesta és una de les qüestions que el **Chevalier de la Méré** va proposar a **Pascal**.

Observem que si llancem un cop un dau la probabilitat de obtenir un sis és $\frac{1}{6} < \frac{1}{2}$.

Si llancem un dau dos cops, la probabilitat d'obtenir almenys un sis és $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{11}{36} < \frac{1}{2}$.

Si llancem un dau tres cops, la probabilitat d'obtenir almenys un sis és $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{91}{216} < \frac{1}{2}$.

Si llancem un dau quatre cops, la probabilitat d'obtenir almenys un sis és $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{671}{1296} > \frac{1}{2}$.

El **Chevalier de la Méré** tenia raó, si llancem un dau 4 cops és avantatjós apostar a que almenys obtindrem un sis.

És avantatjós apostar que almenys obtindrem un sis si llancem un dau quatre cops?

Aquesta és una de les qüestions que el **Chevalier de la Méré** va proposar a **Pascal**.

Observem que si llancem un cop un dau la probabilitat de obtenir un sis és $\frac{1}{6} < \frac{1}{2}$.

Si llancem un dau dos cops, la probabilitat d'obtenir almenys un sis és $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{11}{36} < \frac{1}{2}$.

Si llancem un dau tres cops, la probabilitat d'obtenir almenys un sis és $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{91}{216} < \frac{1}{2}$.

Si llancem un dau quatre cops, la probabilitat d'obtenir almenys un sis és $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{671}{1296} > \frac{1}{2}$.

El **Chevalier de la Méré** tenia raó, si llancem un dau 4 cops és avantatjós apostar a que almenys obtindrem un sis.

És avantatjós apostar que almenys obtindrem un sis si llancem un dau quatre cops?

Aquesta és una de les qüestions que el **Chevalier de la Méré** va proposar a **Pascal**.

Observem que si llancem un cop un dau la probabilitat de obtenir un sis és $\frac{1}{6} < \frac{1}{2}$.

Si llancem un dau dos cops, la probabilitat d'obtenir almenys un sis és $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{11}{36} < \frac{1}{2}$.

Si llancem un dau tres cops, la probabilitat d'obtenir almenys un sis és $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{91}{216} < \frac{1}{2}$.

Si llancem un dau quatre cops, la probabilitat d'obtenir almenys un sis és $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{671}{1296} > \frac{1}{2}$.

El **Chevalier de la Méré** tenia raó, si llancem un dau 4 cops és avantatjós apostar a que almenys obtindrem un sis.

És avantatjós apostar que almenys obtindrem un sis si llancem un dau quatre cops?

Aquesta és una de les qüestions que el **Chevalier de la Méré** va proposar a **Pascal**.

Observem que si llancem un cop un dau la probabilitat de obtenir un sis és $\frac{1}{6} < \frac{1}{2}$.

Si llancem un dau dos cops, la probabilitat d'obtenir almenys un sis és $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{11}{36} < \frac{1}{2}$.

Si llancem un dau tres cops, la probabilitat d'obtenir almenys un sis és $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{91}{216} < \frac{1}{2}$.

Si llancem un dau quatre cops, la probabilitat d'obtenir almenys un sis és $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{671}{1296} > \frac{1}{2}$.

El **Chevalier de la Méré** tenia raó, si llancem un dau 4 cops és avantatjós apostar a que almenys obtindrem un sis.

És avantatjós apostar que almenys obtindrem un sis si llancem un dau quatre cops?

Aquesta és una de les qüestions que el **Chevalier de la Méré** va proposar a **Pascal**.

Observem que si llancem un cop un dau la probabilitat de obtenir un sis és $\frac{1}{6} < \frac{1}{2}$.

Si llancem un dau dos cops, la probabilitat d'obtenir almenys un sis és $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{11}{36} < \frac{1}{2}$.

Si llancem un dau tres cops, la probabilitat d'obtenir almenys un sis és $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{91}{216} < \frac{1}{2}$.

Si llancem un dau quatre cops, la probabilitat d'obtenir almenys un sis és $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{671}{1296} > \frac{1}{2}$.

El **Chevalier de la Méré** tenia raó, si llancem un dau 4 cops és avantatjós apostar a que almenys obtindrem un sis.

Us deixem una altra de les qüestions que va preguntar el **Chevalier de la Méré** a **Pascal**:

Pregunta del Chevalier de la Méré

Si llancem un dau tres cops, que és més avantatjós, apostar que la suma dels resultats serà 9 o que serà 10?

El problema de Monty Hall

Pregunta:

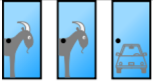


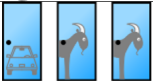


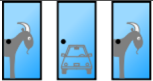

En un concurs de televisió hem de triar entre tres portes tancades. Darrera d'una de les portes hi ha un cotxe i a les altres dues hi ha una cabra. Triem una porta i el presentador ens n'obre una altra en la que hi ha una cabra i ens pregunta si volem canviar la porta escollida. Què és millor **canviar** o **mantenir-se**?



Monty Hall

Resolem el problema suposant que el presentador sempre actua d'aquesta manera. És a dir, sempre després de la nostra elecció ens ensenya una porta on hi ha una cabra i ens dona la possibilitat de canviar.


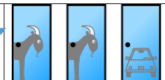
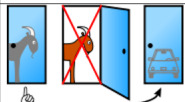


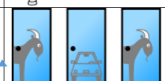

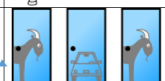
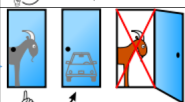
Si decidim NO CANVIAR:

			NO CANVIEM		
	$\frac{1}{3}$		1		GUANYA UNA CABRA
	$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$		GUANYA UN COTXE
			$\frac{1}{2}$		GUANYA UN COTXE
	$\frac{1}{3}$		1		GUANYA UNA CABRA

$$P(\text{Guanyar un cotxe}) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

$$P(\text{Guanyar una cabra}) = \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 1 = \frac{2}{3}.$$

Si decidim CANVIAR:

				CANVIEM		
	1/3		1		GUANYA UN COTXE	
	1/3		1/2		GUANYA UNA CABRA	
	1/3		1/2		GUANYA UNA CABRA	
	1/3		1		GUANYA UN COTXE	

$$P(\text{Guanyar un cotxe}) = \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 1 = \frac{2}{3}.$$

$$P(\text{Guanyar una cabra}) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

Viatge a Austràlia

A l'aeroport trobes una parella que, no coneixes de res, que van de viatge a Austràlia. Els dius que tens una amiga a Austràlia i que si els faria res portar-li un llibre. Et diuen que cap problema i els dones el llibre dins d'un sobre. Però, ves per on, t'has oblidat de posar-hi l'adreça! Penses que avui serà el teu dia de sort i decideixes fer una 6/49. Quan la parella arriba a

Austràlia s'adonen que no hi ha cap adreça i no tenen el teu telèfon. Però recorden que vas parlar d'una amiga. Per tant decideixen donar el paquet a la primera dona que trobin.

Què és més probable, que el paquet arribi a la teva amiga o que et toqui la 6/49?



El llibre d'Austràlia o la 6/49?

A Austràlia hi viuen 12,79 milions de dones i 12,6 milions d'homes. Per tant, la probabilitat que el llibre arribi a la teva amiga és

$$p_1 = \frac{1}{12.790.000}$$

La probabilitat que em toqui la 6/49 és

$$p_2 = \frac{1}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{13.983.816}$$

Per tant és més probable que el llibre arribi a la teva amiga.

El llibre d' Austràlia o la 6/49?

A Austràlia hi viuen 12,79 milions de dones i 12,6 milions d'homes. Per tant, la probabilitat que el llibre arribi a la teva amiga és

$$p_1 = \frac{1}{12.790.000}$$

La probabilitat que em toqui la 6/49 és

$$p_2 = \frac{1}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{13.983.816}$$

Per tant és més probable que el llibre arribi a la teva amiga.

Esperança matemàtica

L'**esperança** és en **Probabilitat** l'equivalent al que la **mitjana** aritmètica representa en **Estadística**.

Si repetim moltes vegades un mateix experiment aleatori que ens dona com a resultat un valor numèric, la mitjana dels resultats obtinguts convergeix a un valor que anomenem **esperança**.

Per exemple si considerem X = resultat del llançament d'un dau.

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + \dots + 6 \times \frac{1}{6} = 3,5$$

Esperança matemàtica

L'**esperança** és en **Probabilitat** l'equivalent al que la **mitjana** aritmètica representa en **Estadística**.

Si repetim moltes vegades un mateix experiment aleatori que ens dona com a resultat un valor numèric, la mitjana dels resultats obtinguts convergeix a un valor que anomenem **esperança**.

Per exemple si considerem X = resultat del llançament d'un dau.

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + \cdots + 6 \times \frac{1}{6} = 3,5$$

La ruleta europea

Una ruleta europea
té 37 caselles numerades del 0 al 36:

18 caselles vermelles

18 caselles negres

el zero

Si apostem a vermelles (o
negres) la probabilitat de guanyar és

$$p = \frac{18}{37} = 0,4865 \quad \text{i la de perdre} \quad q = \frac{19}{37} = 0,5135$$

Per tant, si anomenem X =guanys obtinguts apostant 1 euro

$$E(X) = +1 \times \frac{18}{37} - 1 \times \frac{19}{37} = -\frac{1}{37} = -0,027 \text{ euros}$$



Si juguem moltes vegades, de mitjana perdrem un 2,7% dels diners que posem en joc. És a dir, 1 de cada 37 euros que posem en joc.

És evident que hi haurà gent que guanyarà i gent que perdrà però el que sempre juga molt és el casino i el casino guanyarà de mitjana el 2,7% de tots els diners que es posen en joc.

“Mentre que cada individu és un trencaclosques irresoluble, col·lectivament es transforma en una certesa matemàtica. Els individus canvien, els percentatges es mantenen.”

(Arthur Conan Doyle)

- Tots els jocs del casino (excepte el BlackJack) són lleugerament favorables al casino
- *“Aposteu negres o aposteu vermelles que Blanc sempre guanya”*
- El “balena” japonès Akio Kashiwaki a un casino d'Atlantic City de Donald Trump i el matemàtic Jess Marcum:
 - Al cap de tres dies anava guanyant 5 milions de dòlars
 - Després de 5.066 jugades i 70 hores de joc es va retirar perdent més de 9 milions de dòlars

- Tots els jocs del casino (excepte el BlackJack) són lleugerament favorables al casino
- *“Aposteu negres o aposteu vermelles que Blanc sempre guanya”*
- El “balena” japonès Akio Kashiwaki a un casino d'Atlantic City de Donald Trump i el matemàtic Jess Marcum:
 - Al cap de tres dies anava guanyant 5 milions de dòlars
 - Després de 5.066 jugades i 70 hores de joc es va retirar perdent més de 9 milions de dòlars

- Tots els jocs del casino (excepte el BlackJack) són lleugerament favorables al casino
- *“Aposteu negres o aposteu vermelles que Blanc sempre guanya”*
- El “balena” japonès Akio Kashiwaki a un casino d'Atlantic City de Donald Trump i el matemàtic Jess Marcum:
 - Al cap de tres dies anava guanyant 5 milions de dòlars
 - Després de 5.066 jugades i 70 hores de joc es va retirar perdent més de 9 milions de dòlars

- Tots els jocs del casino (excepte el BlackJack) són lleugerament favorables al casino
- *“Aposteu negres o aposteu vermelles que Blanc sempre guanya”*
- El “balena” japonès Akio Kashiwaki a un casino d'Atlantic City de Donald Trump i el matemàtic Jess Marcum:
 - Al cap de tres dies anava guanyant 5 milions de dòlars
 - Després de 5.066 jugades i 70 hores de joc es va retirar perdent més de 9 milions de dòlars

- Tots els jocs del casino (excepte el BlackJack) són lleugerament favorables al casino
- *“Aposteu negres o aposteu vermelles que Blanc sempre guanya”*
- El “balena” japonès Akio Kashiwaki a un casino d'Atlantic City de Donald Trump i el matemàtic Jess Marcum:
 - Al cap de tres dies anava guanyant 5 milions de dòlars
 - Després de 5.066 jugades i 70 hores de joc es va retirar perdent més de 9 milions de dòlars

Jugar a la martingala

Jugar a la martingala ens permet augmentar la probabilitat de guany. Consisteix en doblar l'aposta en cas de perdre.

Suposem que volem guanyar 1 euro apostant a vermelles o negres a un casino.

Sabem que si juguem 1 euro directament tenim una probabilitat de guanyar 1 euro de $p = 0,4865$

Suposem ara que volem guanyar 1 euro i que partim de 9. És a dir, volem arribar als 10 euros. L'estratègia és la següent:

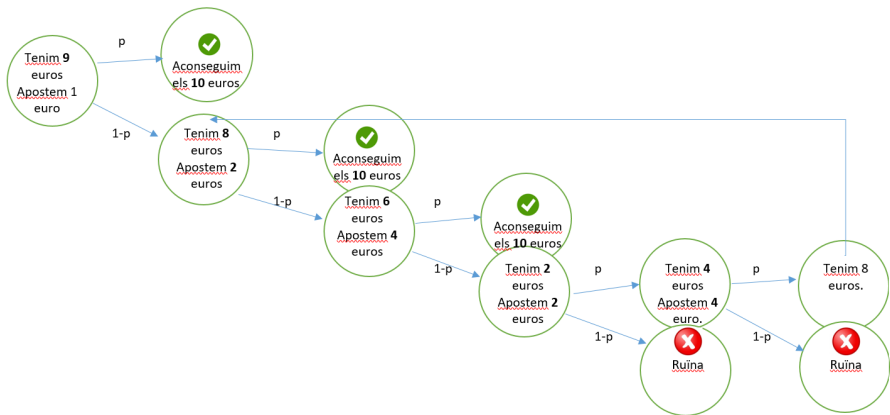
Jugar a la martingala

Jugar a la martingala ens permet augmentar la probabilitat de guany. Consisteix en doblar l'aposta en cas de perdre.

Suposem que volem guanyar 1 euro apostant a vermelles o negres a un casino.

Sabem que si juguem 1 euro directament tenim una probabilitat de guanyar 1 euro de $p = 0,4865$

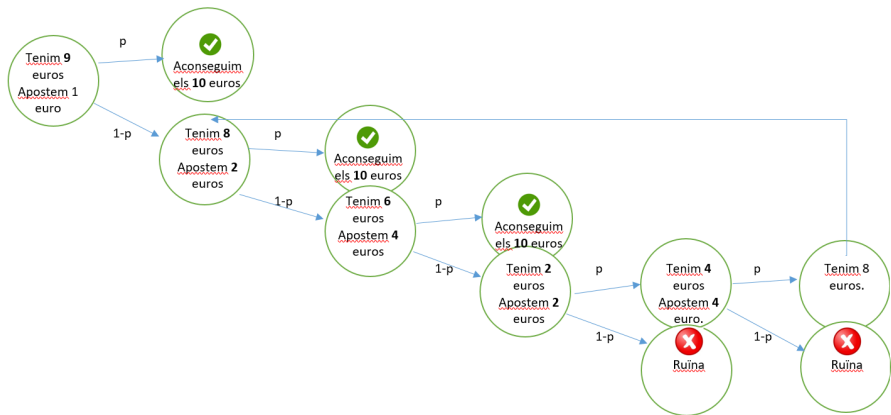
Suposem ara que volem guanyar 1 euro i que partim de 9. És a dir, volem arribar als 10 euros. L'estratègia és la següent:



Si anomenem $p(n)$ = la probabilitat d'arribar a 10 partint de n euros, veiem que

$$p(9) = p + (1 - p) \cdot p(8) \text{ i que}$$

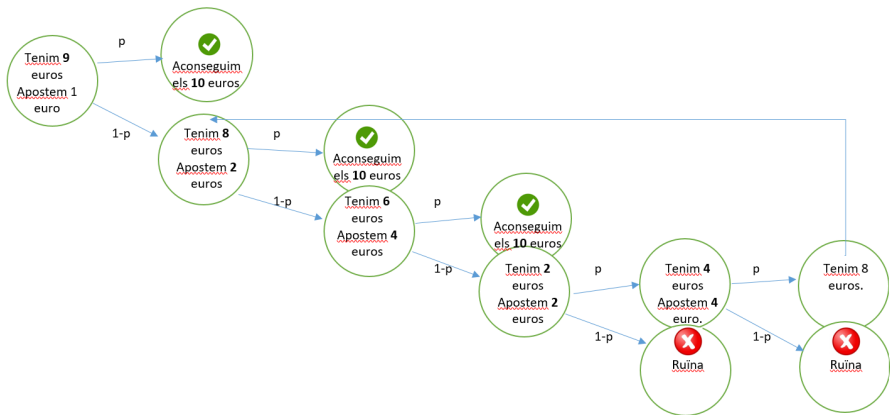
$$p(8) = p + (1 - p) \cdot p + (1 - p)^2 \cdot p^2 \cdot p(8)$$



Si anomenem $p(n)$ = la probabilitat d'arribar a 10 partint de n euros, veiem que

$$p(9) = p + (1 - p) \cdot p(8) \text{ i que}$$

$$p(8) = p + (1 - p) \cdot p + (1 - p)^2 \cdot p^2 \cdot p(8)$$



Si anomenem $p(n)$ = la probabilitat d'arribar a 10 partint de n euros, veiem que

$$p(9) = p + (1 - p) \cdot p(8) \text{ i que}$$

$$p(8) = p + (1 - p) \cdot p + (1 - p)^2 \cdot p^2 \cdot p(8)$$

Resolent l'equació tenim que

$$p(8) = \frac{p + (1 - p) \cdot p}{1 - (1 - p)^2 \cdot p^2}.$$

Per tant,

$$p(9) = p + (1 - p) \cdot \frac{p + (1 - p) \cdot p}{1 - (1 - p)^2 \cdot p^2} = 0,8898.$$

Per tant, hem augmentat la probabilitat de guany de 0,4865 a 0,8898. Si volem guanyar 1 euro i, en lloc de partir de 9, partim de 99 aquesta probabilitat és de 0,9879.

Per tant, veiem que podem augmentar la probabilitat de guanyar 1 euro tant com vulguem posant més diners en joc.

Resolent l'equació tenim que

$$p(8) = \frac{p + (1 - p) \cdot p}{1 - (1 - p)^2 \cdot p^2}.$$

Per tant,

$$p(9) = p + (1 - p) \cdot \frac{p + (1 - p) \cdot p}{1 - (1 - p)^2 \cdot p^2} = 0,8898.$$

Per tant, hem augmentat la probabilitat de guany de 0,4865 a 0,8898. Si volem guanyar 1 euro i, en lloc de partir de 9, partim de 99 aquesta probabilitat és de 0,9879.

Per tant, veiem que podem augmentar la probabilitat de guanyar 1 euro tant com vulguem posant més diners en joc.

Resolent l'equació tenim que

$$p(8) = \frac{p + (1 - p) \cdot p}{1 - (1 - p)^2 \cdot p^2}.$$

Per tant,

$$p(9) = p + (1 - p) \cdot \frac{p + (1 - p) \cdot p}{1 - (1 - p)^2 \cdot p^2} = 0,8898.$$

Per tant, hem augmentat la probabilitat de guany de 0,4865 a 0,8898. Si volem guanyar 1 euro i, en lloc de partir de 9, partim de 99 aquesta probabilitat és de 0,9879.

Per tant, veiem que podem augmentar la probabilitat de guanyar 1 euro tant com vulguem posant més diners en joc.

Resolent l'equació tenim que

$$p(8) = \frac{p + (1 - p) \cdot p}{1 - (1 - p)^2 \cdot p^2}.$$

Per tant,

$$p(9) = p + (1 - p) \cdot \frac{p + (1 - p) \cdot p}{1 - (1 - p)^2 \cdot p^2} = 0,8898.$$

Per tant, hem augmentat la probabilitat de guany de 0,4865 a 0,8898. Si volem guanyar 1 euro i, en lloc de partir de 9, partim de 99 aquesta probabilitat és de 0,9879.

Per tant, veiem que podem augmentar la probabilitat de guanyar 1 euro tant com vulguem posant més diners en joc.

En canvi l'esperança...

Diners posats en joc	Probabilitat de guanyar 1 euro	Probabilitat de perdre-ho tot	Esperança dels guanys
1	0,4865	0,5135	-0,027
9	0,8898	0,1102	-0,102
99	0,9879	0,0121	-0,21

En canvi si juguessim a un joc just, per exemple a cara i creu contra un company,

Diners posats en joc	Probabilitat de guanyar 1 euro	Probabilitat de perdre-ho tot	Esperança dels guanys
1	0,5	0,5	0
9	0,9	0,1	0
99	0,99	0,01	0

No podem convertir en **favorable** un joc **desfavorable**.

En canvi l'esperança...

Diners posats en joc	Probabilitat de guanyar 1 euro	Probabilitat de perdre-ho tot	Esperança dels guanys
1	0,4865	0,5135	-0,027
9	0,8898	0,1102	-0,102
99	0,9879	0,0121	-0,21

En canvi si juguessim a un joc just, per exemple a cara i creu contra un company,

Diners posats en joc	Probabilitat de guanyar 1 euro	Probabilitat de perdre-ho tot	Esperança dels guanys
1	0,5	0,5	0
9	0,9	0,1	0
99	0,99	0,01	0

No podem convertir en **favorable** un joc **desfavorable**.

En canvi l'esperança...

Diners posats en joc	Probabilitat de guanyar 1 euro	Probabilitat de perdre-ho tot	Esperança dels guanys
1	0,4865	0,5135	-0,027
9	0,8898	0,1102	-0,102
99	0,9879	0,0121	-0,21

En canvi si juguessim a un joc just, per exemple a cara i creu contra un company,

Diners posats en joc	Probabilitat de guanyar 1 euro	Probabilitat de perdre-ho tot	Esperança dels guanys
1	0,5	0,5	0
9	0,9	0,1	0
99	0,99	0,01	0

No podem convertir en **favorable** un joc **desfavorable**.

Parlem de finances

- A l'agost volem anar als Estats Units de viatge i necessitarem 1.000 dòlars
- A data d'avui

$$1 \text{ euro} = 1,20 \text{ dòlars}$$

$$1 \text{ dòlar} = 0,83 \text{ euros}$$

- Sembla que la tendència del dòlar és anar pujant i per tant seria prudent canviar ara els dòlars i guardar-los
- Però com que no és segur, també podria passar que el dòlar baixés i fos millor esperar...

Què hem de fer????!!!

Parlem de finances

- A l'agost volem anar als Estats Units de viatge i necessitarem 1.000 dòlars
- A data d'avui

$$1 \text{ euro} = 1,20 \text{ dòlars}$$

$$1 \text{ dòlar} = 0,83 \text{ euros}$$

- Sembla que la tendència del dòlar és anar pujant i per tant seria prudent canviar ara els dòlars i guardar-los
- Però com que no és segur, també podria passar que el dòlar baixés i fos millor esperar...

Què hem de fer????!!!

Parlem de finances

- A l'agost volem anar als Estats Units de viatge i necessitarem 1.000 dòlars
- A data d'avui

$$1 \text{ euro} = 1,20 \text{ dòlars}$$

$$1 \text{ dòlar} = 0,83 \text{ euros}$$

- Sembla que la tendència del dòlar és anar pujant i per tant seria prudent canviar ara els dòlars i guardar-los
- Però com que no és segur, també podria passar que el dòlar baixés i fos millor esperar...

Què hem de fer????!!

Parlem de finances

- A l'agost volem anar als Estats Units de viatge i necessitarem 1.000 dòlars
- A data d'avui

$$1 \text{ euro} = 1,20 \text{ dòlars}$$

$$1 \text{ dòlar} = 0,83 \text{ euros}$$

- Sembla que la tendència del dòlar és anar pujant i per tant seria prudent canviar ara els dòlars i guardar-los
- Però com que no és segur, també podria passar que el dòlar baixés i fos millor esperar...

Què hem de fer????!!

Parlem de finances

- A l'agost volem anar als Estats Units de viatge i necessitarem 1.000 dòlars
- A data d'avui

$$1 \text{ euro} = 1,20 \text{ dòlars}$$

$$1 \text{ dòlar} = 0,83 \text{ euros}$$

- Sembla que la tendència del dòlar és anar pujant i per tant seria prudent canviar ara els dòlars i guardar-los
- Però com que no és segur, també podria passar que el dòlar baixés i fos millor esperar...

Què hem de fer????!!!

Introduïm les probabilitats

Preu del dòlar

Avui 0,83 euros

Agost $\begin{cases} 0,94 \text{ euros} & \text{amb probabilitat } p \\ 0,74 \text{ euros} & \text{amb probabilitat } 1 - p \end{cases}$

Model de Cox-Ross-Rubinstein

Opció de compra: adquirir el dret, però no l'obligació, de comprar dòlars l'1 d'agost a un preu fixat.

Introduïm les probabilitats

Preu del dòlar

Avui 0,83 euros

Agost $\left\{ \begin{array}{ll} 0,94 \text{ euros} & \text{amb probabilitat } p \\ 0,74 \text{ euros} & \text{amb probabilitat } 1 - p \end{array} \right.$

Model de Cox-Ross-Rubinstein

Opció de compra: adquirir el dret, però no l'obligació, de comprar dòlars l'1 d'agost a un preu fixat.

Introduïm les probabilitats

Preu del dòlar

Avui 0,83 euros

Agost $\begin{cases} 0,94 \text{ euros} & \text{amb probabilitat } p \\ 0,74 \text{ euros} & \text{amb probabilitat } 1 - p \end{cases}$

Model de Cox-Ross-Rubinstein

Opció de compra: adquirir el dret, però no l'obligació, de comprar dòlars l'1 d'agost a un preu fixat.

Introduïm les probabilitats

Preu del dòlar

Avui 0,83 euros

Agost $\begin{cases} 0,94 \text{ euros} & \text{amb probabilitat } p \\ 0,74 \text{ euros} & \text{amb probabilitat } 1 - p \end{cases}$

Model de Cox-Ross-Rubinstein

Opció de compra: adquirir el dret, però no l'obligació, de comprar dòlars l'1 d'agost a un preu fixat.

Introduïm les probabilitats

Preu del dòlar

Avui 0,83 euros

Agost $\begin{cases} 0,94 \text{ euros} & \text{amb probabilitat } p \\ 0,74 \text{ euros} & \text{amb probabilitat } 1 - p \end{cases}$

Model de **Cox-Ross-Rubinstein**

Opció de compra: adquirir el dret, però no l'obligació, de comprar dòlars l'1 d'agost a un preu fixat.

Introduïm les probabilitats

Preu del dòlar

Avui 0,83 euros

Agost $\begin{cases} 0,94 \text{ euros} & \text{amb probabilitat } p \\ 0,74 \text{ euros} & \text{amb probabilitat } 1 - p \end{cases}$

Model de **Cox-Ross-Rubinstein**

Opció de compra: adquirir el dret, però no l'obligació, de comprar dòlars l'1 d'agost a un preu fixat.

Opció de compra

Fixem el preu de 0,85 euros per dòlar

- Si al més d'agost el dòlar puja tancarem el tracte (exercint el dret) i comprarem els dòlars a 0,85 euros
- Si al més d'agost el dòlar baixa comprarem directament els dòlars al preu de mercat

Per adquirir una opció de compra cal pagar alguna cosa: **la prima**

Opció de compra

Fixem el preu de 0,85 euros per dòlar

- Si al més d'agost el dòlar puja tancarem el tracte (exercint el dret) i comprarem els dòlars a 0,85 euros
- Si al més d'agost el dòlar baixa comprarem directament els dòlars al preu de mercat

Per adquirir una opció de compra cal pagar alguna cosa: la prima

Opció de compra

Fixem el preu de 0,85 euros per dòlar

- Si al més d'agost el dòlar puja tancarem el tracte (exercint el dret) i comprarem els dòlars a 0,85 euros
- Si al més d'agost el dòlar baixa comprarem directament els dòlars al preu de mercat

Per adquirir una opció de compra cal pagar alguna cosa: la prima

Opció de compra

Fixem el preu de 0,85 euros per dòlar

- Si al més d'agost el dòlar puja tancarem el tracte (exercint el dret) i comprarem els dòlars a 0,85 euros
- Si al més d'agost el dòlar baixa comprarem directament els dòlars al preu de mercat

Per adquirir una opció de compra cal pagar alguna cosa: **la prima**

Una mica d'història...

- A l'edat mitjana els agricultors i comerciants comencen a utilitzar **contractes de futurs**: acord en ferm de compra o venda d'un producte a un preu determinat i en una data fixada
- Al Segle XVII, a Holanda, es comencen a fer **opcions de compra i venda** de bulbs de tulipa.
- Actualment les opcions de compra i venda són un producte financer molt important i n'hi ha de tota mena de productes
- El 1973 els matemàtics Black i Scholes proposen un mètode per calcular la prima de les opcions.
- Scholes rep el 1997 el premi Nobel d'economia per aquest descobriment (Black havia mort l'any 1995)

Una mica d'història...

- A l'edat mitjana els agricultors i comerciants comencen a utilitzar **contractes de futurs**: acord en ferm de compra o venda d'un producte a un preu determinat i en una data fixada
- Al Segle XVII, a Holanda, es comencen a fer **opcions de compra i venda** de bulbs de tulipa.
- Actualment les opcions de compra i venda són un producte financer molt important i n'hi ha de tota mena de productes
- El 1973 els matemàtics Black i Scholes proposen un mètode per calcular la prima de les opcions.
- Scholes rep el 1997 el premi Nobel d'economia per aquest descobriment (Black havia mort l'any 1995)

Una mica d'història...

- A l'edat mitjana els agricultors i comerciants comencen a utilitzar **contractes de futurs**: acord en ferm de compra o venda d'un producte a un preu determinat i en una data fixada
- Al Segle XVII, a Holanda, es comencen a fer **opcions de compra i venda** de bulbs de tulipa.
- Actualment les opcions de compra i venda són un producte financer molt important i n'hi ha de tota mena de productes
- El 1973 els matemàtics Black i Scholes proposen un mètode per calcular la prima de les opcions.
- Scholes rep el 1997 el premi Nobel d'economia per aquest descobriment (Black havia mort l'any 1995)

Una mica d'història...

- A l'edat mitjana els agricultors i comerciants comencen a utilitzar **contractes de futurs**: acord en ferm de compra o venda d'un producte a un preu determinat i en una data fixada
- Al Segle XVII, a Holanda, es comencen a fer **opcions de compra i venda** de bulbs de tulipa.
- Actualment les opcions de compra i venda són un producte financer molt important i n'hi ha de tota mena de productes
- El 1973 els matemàtics Black i Scholes proposen un mètode per calcular la prima de les opcions.
- Scholes rep el 1997 el premi Nobel d'economia per aquest descobriment (Black havia mort l'any 1995)

Una mica d'història...

- A l'edat mitjana els agricultors i comerciants comencen a utilitzar **contractes de futurs**: acord en ferm de compra o venda d'un producte a un preu determinat i en una data fixada
- Al Segle XVII, a Holanda, es comencen a fer **opcions de compra i venda** de bulbs de tulipa.
- Actualment les opcions de compra i venda són un producte financer molt important i n'hi ha de tota mena de productes
- El 1973 els matemàtics Black i Scholes proposen un mètode per calcular la prima de les opcions.
- Scholes rep el 1997 el premi Nobel d'economia per aquest descobriment (Black havia mort l'any 1995)

Una mica d'història...

- A l'edat mitjana els agricultors i comerciants comencen a utilitzar **contractes de futurs**: acord en ferm de compra o venda d'un producte a un preu determinat i en una data fixada
- Al Segle XVII, a Holanda, es comencen a fer **opcions de compra i venda** de bulbs de tulipa.
- Actualment les opcions de compra i venda són un producte financer molt important i n'hi ha de tota mena de productes
- El 1973 els matemàtics Black i Scholes proposen un mètode per calcular la prima de les opcions.
- Scholes rep el 1997 el premi Nobel d'economia per aquest descobriment (Black havia mort l'any 1995)

Com es valora una opció?

- El valor d'una opció es basa en
 - el preu del producte en qüestió
 - les probabilitats d'aquest preu al moment d'executar l'opció
- La idea d'en Black i en Scholes fou buscar les probabilitats que fan que comprar i vendre dòlars sigui un joc just
- El mercat es comporta sempre, per a la majoria de gent, com un joc just: uns hi guanyen i d'altres hi perden però els guanyadors i els perdedors no sempre són els mateixos

Com es valora una opció?

- El valor d'una opció es basa en
 - el preu del producte en qüestió
 - les probabilitats d'aquest preu al moment d'executar l'opció
- La idea d'en Black i en Scholes fou buscar les probabilitats que fan que comprar i vendre dòlars sigui un joc just
- El mercat es comporta sempre, per a la majoria de gent, com un joc just: uns hi guanyen i d'altres hi perden però els guanyadors i els perdedors no sempre són els mateixos

Com es valora una opció?

- El valor d'una opció es basa en
 - el preu del producte en qüestió
 - les probabilitats d'aquest preu al moment d'executar l'opció
- La idea d'en Black i en Scholes fou buscar les probabilitats que fan que comprar i vendre dòlars sigui un joc just
- El mercat es comporta sempre, per a la majoria de gent, com un joc just: uns hi guanyen i d'altres hi perden però els guanyadors i els perdedors no sempre són els mateixos

Com es valora una opció?

- El valor d'una opció es basa en
 - el preu del producte en qüestió
 - les probabilitats d'aquest preu al moment d'executar l'opció
- La idea d'en Black i en Scholes fou buscar les probabilitats que fan que comprar i vendre dòlars sigui un joc just
- El mercat es comporta sempre, per a la majoria de gent, com un joc just: uns hi guanyen i d'altres hi perden però els guanyadors i els perdedors no sempre són els mateixos

Com es valora una opció?

- El valor d'una opció es basa en
 - el preu del producte en qüestió
 - les probabilitats d'aquest preu al moment d'executar l'opció
- La idea d'en Black i en Scholes fou buscar les **probabilitats** que fan que comprar i vendre dòlars sigui un **joc just**
- El mercat es comporta sempre, per a la majoria de gent, com un joc just: uns hi guanyen i d'altres hi perden però els guanyadors i els perdedors no sempre són els mateixos

Com es valora una opció?

- El valor d'una opció es basa en
 - el preu del producte en qüestió
 - les probabilitats d'aquest preu al moment d'executar l'opció
- La idea d'en Black i en Scholes fou buscar les **probabilitats** que fan que comprar i vendre dòlars sigui un **joc just**
- El mercat es comporta sempre, per a la majoria de gent, com un joc just: uns hi guanyen i d'altres hi perden però els guanyadors i els perdedors no sempre són els mateixos

Com es valora una opció?

Avui 0,83 euros

Agost $\begin{cases} 0,94 \text{ euros} & \text{amb probabilitat } p \\ 0,74 \text{ euros} & \text{amb probabilitat } 1 - p \end{cases}$

L'esperança matemàtica d'aquest joc és:

$$0,94 \times p + 0,74 \times (1 - p)$$

Per a que el joc sigui just cal que aquesta esperança sigui igual al preu que té el dòlar avui:

$$0,94 \times p + 0,74 \times (1 - p) = 0,83$$

La solució és

$$p = 0,45$$

Com es valora una opció?

Avui 0,83 euros

Agost $\begin{cases} 0,94 \text{ euros} & \text{amb probabilitat } p \\ 0,74 \text{ euros} & \text{amb probabilitat } 1 - p \end{cases}$

L'esperança matemàtica d'aquest joc és:

$$0,94 \times p + 0,74 \times (1 - p)$$

Per a que el joc sigui just cal que aquesta esperança sigui igual al preu que té el dòlar avui:

$$0,94 \times p + 0,74 \times (1 - p) = 0,83$$

La solució és

$$p = 0,45$$

Com es valora una opció?

Avui 0,83 euros

Agost $\begin{cases} 0,94 \text{ euros} & \text{amb probabilitat } p \\ 0,74 \text{ euros} & \text{amb probabilitat } 1 - p \end{cases}$

L'esperança matemàtica d'aquest joc és:

$$0,94 \times p + 0,74 \times (1 - p)$$

Per a que el joc sigui just cal que aquesta esperança sigui igual al preu que té el dòlar avui:

$$0,94 \times p + 0,74 \times (1 - p) = 0,83$$

La solució és

$$p = 0,45$$

Com es valora una opció?

Avui 0,83 euros

Agost $\begin{cases} 0,94 \text{ euros} & \text{amb probabilitat } p \\ 0,74 \text{ euros} & \text{amb probabilitat } 1 - p \end{cases}$

L'esperança matemàtica d'aquest joc és:

$$0,94 \times p + 0,74 \times (1 - p)$$

Per a que el joc sigui just cal que aquesta esperança sigui igual al preu que té el dòlar avui:

$$0,94 \times p + 0,74 \times (1 - p) = 0,83$$

La solució és

$$p = 0,45$$

Com es valora una opció?

Avui 0,83 euros

Agost $\begin{cases} 0,94 \text{ euros} & \text{amb probabilitat } p \\ 0,74 \text{ euros} & \text{amb probabilitat } 1 - p \end{cases}$

L'esperança matemàtica d'aquest joc és:

$$0,94 \times p + 0,74 \times (1 - p)$$

Per a que el joc sigui just cal que aquesta esperança sigui igual al preu que té el dòlar avui:

$$0,94 \times p + 0,74 \times (1 - p) = 0,83$$

La solució és

$$p = 0,45$$

Com es valora una opció?

Avui 0,83 euros

Agost $\begin{cases} 0,94 \text{ euros} & \text{amb probabilitat } p \\ 0,74 \text{ euros} & \text{amb probabilitat } 1 - p \end{cases}$

L'esperança matemàtica d'aquest joc és:

$$0,94 \times p + 0,74 \times (1 - p)$$

Per a que el joc sigui just cal que aquesta esperança sigui igual al preu que té el dòlar avui:

$$0,94 \times p + 0,74 \times (1 - p) = 0,83$$

La solució és

$$p = 0,45$$

Com es valora una opció?

Per a calcular la **prima** també ho fem de forma que el comprador i el venedor participin en un joc just.

- Si el dòlar puja comprarem els dòlars a 0,85 enlloc de 0,94 (i tindrem un benefici per dòlar de $0,94 - 0,85$)
- Si el dòlar baixa els comprarem al preu del mercat

beneficis per dòlar $\begin{cases} 0,94 - 0,85 \text{ euros} & \text{amb probabilitat } 0,45 \\ 0 \text{ euros} & \text{amb probabilitat } 0,55 \end{cases}$

Per a que el joc sigui just la **prima** que hem de pagar és el benefici esperat:

$$\begin{aligned} \text{prima} &= 1.000 [(0,94 - 0,85) \times 0,45 + 0 \times 0,55] = \\ &= 40,5 \text{ euros} \end{aligned}$$

Com es valora una opció?

Per a calcular la **prima** també ho fem de forma que el comprador i el venedor participin en un joc just.

- Si el dòlar puja comprarem els dòlars a 0,85 enlloc de 0,94 (i tindrem un benefici per dòlar de $0,94 - 0,85$)
- Si el dòlar baixa els comprarem al preu del mercat

beneficis per dòlar $\begin{cases} 0,94 - 0,85 \text{ euros} & \text{amb probabilitat } 0,45 \\ 0 \text{ euros} & \text{amb probabilitat } 0,55 \end{cases}$

Per a que el joc sigui just la **prima** que hem de pagar és el benefici esperat:

$$\begin{aligned} \text{prima} &= 1.000 [(0,94 - 0,85) \times 0,45 + 0 \times 0,55] = \\ &= 40,5 \text{ euros} \end{aligned}$$

Com es valora una opció?

Per a calcular la **prima** també ho fem de forma que el comprador i el venedor participin en un joc just.

- Si el dòlar puja comprarem els dòlars a 0,85 enlloc de 0,94 (i tindrem un benefici per dòlar de $0,94 - 0,85$)
- Si el dòlar baixa els comprarem al preu del mercat

beneficis per dòlar $\begin{cases} 0,94 - 0,85 \text{ euros} & \text{amb probabilitat } 0,45 \\ 0 \text{ euros} & \text{amb probabilitat } 0,55 \end{cases}$

Per a que el joc sigui just la **prima** que hem de pagar és el benefici esperat:

$$\begin{aligned} \text{prima} &= 1.000 [(0,94 - 0,85) \times 0,45 + 0 \times 0,55] = \\ &= 40,5 \text{ euros} \end{aligned}$$

Com es valora una opció?

Per a calcular la **prima** també ho fem de forma que el comprador i el venedor participin en un joc just.

- Si el dòlar puja comprarem els dòlars a 0,85 enlloc de 0,94 (i tindrem un benefici per dòlar de $0,94 - 0,85$)
- Si el dòlar baixa els comprarem al preu del mercat

beneficis per dòlar $\begin{cases} 0,94 - 0,85 \text{ euros} & \text{amb probabilitat } 0,45 \\ 0 \text{ euros} & \text{amb probabilitat } 0,55 \end{cases}$

Per a que el joc sigui just la **prima** que hem de pagar és el benefici esperat:

$$\begin{aligned} \text{prima} &= 1.000 [(0,94 - 0,85) \times 0,45 + 0 \times 0,55] = \\ &= 40,5 \text{ euros} \end{aligned}$$

Com es valora una opció?

Per a calcular la **prima** també ho fem de forma que el comprador i el venedor participin en un joc just.

- Si el dòlar puja comprarem els dòlars a 0,85 enlloc de 0,94 (i tindrem un benefici per dòlar de $0,94 - 0,85$)
- Si el dòlar baixa els comprarem al preu del mercat

beneficis per dòlar $\begin{cases} 0,94 - 0,85 \text{ euros} & \text{amb probabilitat } 0,45 \\ 0 \text{ euros} & \text{amb probabilitat } 0,55 \end{cases}$

Per a que el joc sigui just la **prima** que hem de pagar és el benefici esperat:

$$\begin{aligned} \text{prima} &= 1.000 [(0,94 - 0,85) \times 0,45 + 0 \times 0,55] = \\ &= 40,5 \text{ euros} \end{aligned}$$

Com es valora una opció?

Per a calcular la **prima** també ho fem de forma que el comprador i el venedor participin en un joc just.

- Si el dòlar puja comprarem els dòlars a 0,85 enlloc de 0,94 (i tindrem un benefici per dòlar de $0,94 - 0,85$)
- Si el dòlar baixa els comprarem al preu del mercat

beneficis per dòlar $\begin{cases} 0,94 - 0,85 \text{ euros} & \text{amb probabilitat } 0,45 \\ 0 \text{ euros} & \text{amb probabilitat } 0,55 \end{cases}$

Per a que el joc sigui just la **prima** que hem de pagar és el benefici esperat:

$$\begin{aligned} \text{prima} &= 1.000 [(0,94 - 0,85) \times 0,45 + 0 \times 0,55] = \\ &= 40,5 \text{ euros} \end{aligned}$$

Com es valora una opció?

Per a calcular la **prima** també ho fem de forma que el comprador i el venedor participin en un joc just.

- Si el dòlar puja comprarem els dòlars a 0,85 enlloc de 0,94 (i tindrem un benefici per dòlar de $0,94 - 0,85$)
- Si el dòlar baixa els comprarem al preu del mercat

beneficis per dòlar $\begin{cases} 0,94 - 0,85 \text{ euros} & \text{amb probabilitat } 0,45 \\ 0 \text{ euros} & \text{amb probabilitat } 0,55 \end{cases}$

Per a que el joc sigui just la **prima** que hem de pagar és el benefici esperat:

$$\begin{aligned} \text{prima} &= 1.000 [(0,94 - 0,85) \times 0,45 + 0 \times 0,55] = \\ &= 40,5 \text{ euros} \end{aligned}$$

Com es valora una opció?

Per a calcular la **prima** també ho fem de forma que el comprador i el venedor participin en un joc just.

- Si el dòlar puja comprarem els dòlars a 0,85 enlloc de 0,94 (i tindrem un benefici per dòlar de $0,94 - 0,85$)
- Si el dòlar baixa els comprarem al preu del mercat

beneficis per dòlar $\begin{cases} 0,94 - 0,85 \text{ euros} & \text{amb probabilitat } 0,45 \\ 0 \text{ euros} & \text{amb probabilitat } 0,55 \end{cases}$

Per a que el joc sigui just la **prima** que hem de pagar és el benefici esperat:

$$\begin{aligned} \text{prima} &= 1.000 [(0,94 - 0,85) \times 0,45 + 0 \times 0,55] = \\ &= 40,5 \text{ euros} \end{aligned}$$

Com es valora una opció?

Per a calcular la **prima** també ho fem de forma que el comprador i el venedor participin en un joc just.

- Si el dòlar puja comprarem els dòlars a 0,85 enlloc de 0,94 (i tindrem un benefici per dòlar de $0,94 - 0,85$)
- Si el dòlar baixa els comprarem al preu del mercat

beneficis per dòlar $\begin{cases} 0,94 - 0,85 \text{ euros} & \text{amb probabilitat } 0,45 \\ 0 \text{ euros} & \text{amb probabilitat } 0,55 \end{cases}$

Per a que el joc sigui just la **prima** que hem de pagar és el benefici esperat:

$$\begin{aligned} \text{prima} &= 1.000 [(0,94 - 0,85) \times 0,45 + 0 \times 0,55] = \\ &= 40,5 \text{ euros} \end{aligned}$$

Com es valora una opció?

- Si el dòlar puja, executem l'opció i en total haurem pagat $1.000 \times 0,85 + 40,5 = 890,5$ euros
- Si el dòlar baixa els comprem al preu del mercat i haurem pagat $1.000 \times 0,74 + 40,5 = 780,5$ euros

	sense opció	amb opció	diferència
si el dòlar puja	940	890,5	49,5
si el dòlar baixa	740	780,5	-40,5
variació	200	110	

Amb l'opció de compra hem reduït la variació dels preus que haurem de pagar en un 45% (90 euros sobre 200)

Com es valora una opció?

- Si el dòlar puja, executem l'opció i en total haurem pagat
 $1.000 \times 0,85 + 40,5 = 890,5$ euros
- Si el dòlar baixa els comprem al preu del mercat i haurem pagat
 $1.000 \times 0,74 + 40,5 = 780,5$ euros

	sense opció	amb opció	diferència
si el dòlar puja	940	890,5	49,5
si el dòlar baixa	740	780,5	-40,5
variació	200	110	

Amb l'opció de compra hem reduït la variació dels preus que haurem de pagar en un 45% (90 euros sobre 200)

Com es valora una opció?

- Si el dòlar puja, executem l'opció i en total haurem pagat $1.000 \times 0,85 + 40,5 = 890,5$ euros
- Si el dòlar baixa els comprem al preu del mercat i haurem pagat $1.000 \times 0,74 + 40,5 = 780,5$ euros

	sense opció	amb opció	diferència
si el dòlar puja	940	890,5	49,5
si el dòlar baixa	740	780,5	-40,5
variació	200	110	

Amb l'opció de compra hem reduït la variació dels preus que haurem de pagar en un 45% (90 euros sobre 200)

Com es valora una opció?

- Si el dòlar puja, executem l'opció i en total haurem pagat $1.000 \times 0,85 + 40,5 = 890,5$ euros
- Si el dòlar baixa els comprem al preu del mercat i haurem pagat $1.000 \times 0,74 + 40,5 = 780,5$ euros

	sense opció	amb opció	diferència
si el dòlar puja	940	890,5	49,5
si el dòlar baixa	740	780,5	-40,5
variació	200	110	

Amb l'opció de compra hem reduït la variació dels preus que haurem de pagar en un 45% (90 euros sobre 200)

Com es valora una opció?

- Si el dòlar puja, executem l'opció i en total haurem pagat $1.000 \times 0,85 + 40,5 = 890,5$ euros
- Si el dòlar baixa els comprem al preu del mercat i haurem pagat $1.000 \times 0,74 + 40,5 = 780,5$ euros

	sense opció	amb opció	diferència
si el dòlar puja	940	890,5	49,5
si el dòlar baixa	740	780,5	-40,5
variació	200	110	

Amb l'opció de compra hem reduït la variació dels preus que haurem de pagar en un 45% (90 euros sobre 200)

Com es valora una opció?

- Si el dòlar puja, executem l'opció i en total haurem pagat $1.000 \times 0,85 + 40,5 = 890,5$ euros
- Si el dòlar baixa els comprem al preu del mercat i haurem pagat $1.000 \times 0,74 + 40,5 = 780,5$ euros

	sense opció	amb opció	diferència
si el dòlar puja	940	890,5	49,5
si el dòlar baixa	740	780,5	-40,5
variació	200	110	

Amb l'opció de compra hem reduït la variació dels preus que haurem de pagar en un 45% (90 euros sobre 200)

Com es valora una opció?

- Si el dòlar puja, executem l'opció i en total haurem pagat $1.000 \times 0,85 + 40,5 = 890,5$ euros
- Si el dòlar baixa els comprem al preu del mercat i haurem pagat $1.000 \times 0,74 + 40,5 = 780,5$ euros

	sense opció	amb opció	diferència
si el dòlar puja	940	890,5	49,5
si el dòlar baixa	740	780,5	-40,5
variació	200	110	

Amb l'opció de compra hem reduït la variació dels preus que haurem de pagar en un 45% (90 euros sobre 200)

Així funciona la borsa...

- Aquest raonament el podem fer per a una empresa que haurà de pagar 1 milió de dòlars d'aquí a uns mesos i amb les opcions redueix la incertesa de la factura
- Existeix una estratègia al mercat, **cobertura**, per a que el venedor si vol inverteix la **prima** d'una certa forma i segur que no hi guanya ni hi perd res passi el que passi amb el preu euro/dòlar
- També es pot adquirir una opció per especular. Algú que creu que el dòlar pujarà a l'estiu adquireix una opció de compra:
 - Si el dòlar puja compra els dòlars al preu fixat i els torna a vendre al preu del mercat
 - Si el dòlar baixa no fa res i ha perdut la prima: ha fet una aposta i ha perdut

Així funciona la borsa...

- Aquest raonament el podem fer per a una empresa que haurà de pagar 1 milió de dòlars d'aquí a uns mesos i amb les opcions redueix la incertesa de la factura
- Existeix una estratègia al mercat, **cobertura**, per a que el venedor si vol inverteix la **prima** d'una certa forma i segur que no hi guanya ni hi perd res passi el que passi amb el preu euro/dòlar
- També es pot adquirir una opció per especular. Algú que creu que el dòlar pujarà a l'estiu adquireix una opció de compra:
 - Si el dòlar puja compra els dòlars al preu fixat i els torna a vendre al preu del mercat
 - Si el dòlar baixa no fa res i ha perdut la prima: ha fet una aposta i ha perdut

Així funciona la borsa...

- Aquest raonament el podem fer per a una empresa que haurà de pagar 1 milió de dòlars d'aquí a uns mesos i amb les opcions redueix la incertesa de la factura
- Existeix una estratègia al mercat, **cobertura**, per a que el venedor si vol inverteix la **prima** d'una certa forma i segur que no hi guanya ni hi perd res passi el que passi amb el preu euro/dòlar
- També es pot adquirir una opció per especular. Algú que creu que el dòlar pujarà a l'estiu adquireix una opció de compra:
 - Si el dòlar puja compra els dòlars al preu fixat i els torna a vendre al preu del mercat
 - Si el dòlar baixa no fa res i ha perdut la prima: ha fet una aposta i ha perdut

Així funciona la borsa...

- Aquest raonament el podem fer per a una empresa que haurà de pagar 1 milió de dòlars d'aquí a uns mesos i amb les opcions redueix la incertesa de la factura
- Existeix una estratègia al mercat, **cobertura**, per a que el venedor si vol inverteix la **prima** d'una certa forma i segur que no hi guanya ni hi perd res passi el que passi amb el preu euro/dòlar
- També es pot adquirir una opció per especular. Algú que creu que el dòlar pujarà a l'estiu adquireix una opció de compra:
 - Si el dòlar puja compra els dòlars al preu fixat i els torna a vendre al preu del mercat
 - Si el dòlar baixa no fa res i ha perdut la prima: ha fet una aposta i ha perdut

Així funciona la borsa...

- Aquest raonament el podem fer per a una empresa que haurà de pagar 1 milió de dòlars d'aquí a uns mesos i amb les opcions redueix la incertesa de la factura
- Existeix una estratègia al mercat, **cobertura**, per a que el venedor si vol inverteix la **prima** d'una certa forma i segur que no hi guanya ni hi perd res passi el que passi amb el preu euro/dòlar
- També es pot adquirir una opció per especular. Algú que creu que el dòlar pujarà a l'estiu adquireix una opció de compra:
 - Si el dòlar puja compra els dòlars al preu fixat i els torna a vendre al preu del mercat
 - Si el dòlar baixa no fa res i ha perdut la prima: ha fet una aposta i ha perdut

Així funciona la borsa...

- Aquest raonament el podem fer per a una empresa que haurà de pagar 1 milió de dòlars d'aquí a uns mesos i amb les opcions redueix la incertesa de la factura
- Existeix una estratègia al mercat, **cobertura**, per a que el venedor si vol inverteix la **prima** d'una certa forma i segur que no hi guanya ni hi perd res passi el que passi amb el preu euro/dòlar
- També es pot adquirir una opció per especular. Algú que creu que el dòlar pujarà a l'estiu adquireix una opció de compra:
 - Si el dòlar puja compra els dòlars al preu fixat i els torna a vendre al preu del mercat
 - Si el dòlar baixa no fa res i ha perdut la prima: ha fet una aposta i ha perdut

Així funciona la borsa...

En el mercat hi participen tres tipus de persones:

- uns per necessitat (com nosaltres que volem fer el viatge o les empreses)
- uns intermediaris (que guanyen unes comissions)
- els especuladors

Les opcions permeten la transferència de risc entre qui té la necessitat de prendre una decisió en un ambient d'incertesa i els que participen a la borsa per tal de guanyar diners i que estan disposats a córrer un risc

Així funciona la borsa...

En el mercat hi participen tres tipus de persones:

- uns per necessitat (com nosaltres que volem fer el viatge o les empreses)
- uns intermediaris (que guanyen unes comissions)
- els especuladors

Les opcions permeten la transferència de risc entre qui té la necessitat de prendre una decisió en un ambient d'incertesa i els que participen a la borsa per tal de guanyar diners i que estan disposats a córrer un risc

Així funciona la borsa...

En el mercat hi participen tres tipus de persones:

- uns per necessitat (com nosaltres que volem fer el viatge o les empreses)
- uns intermediaris (que guanyen unes comissions)
- els especuladors

Les opcions permeten la transferència de risc entre qui té la necessitat de prendre una decisió en un ambient d'incertesa i els que participen a la borsa per tal de guanyar diners i que estan disposats a córrer un risc

Així funciona la borsa...

En el mercat hi participen tres tipus de persones:

- uns per necessitat (com nosaltres que volem fer el viatge o les empreses)
- uns intermediaris (que guanyen unes comissions)
- els especuladors

Les opcions permeten la transferència de risc entre qui té la necessitat de prendre una decisió en un ambient d'incertesa i els que participen a la borsa per tal de guanyar diners i que estan disposats a córrer un risc

Així funciona la borsa...

En el mercat hi participen tres tipus de persones:

- uns per necessitat (com nosaltres que volem fer el viatge o les empreses)
- uns intermediaris (que guanyen unes comissions)
- els especuladors

Les opcions permeten la transferència de risc entre qui té la necessitat de prendre una decisió en un ambient d'incertesa i els que participen a la borsa per tal de guanyar diners i que estan disposats a córrer un risc

Així funciona la borsa...

En el mercat hi participen tres tipus de persones:

- uns per necessitat (com nosaltres que volem fer el viatge o les empreses)
- uns intermediaris (que guanyen unes comissions)
- els especuladors

Les opcions permeten la transferència de risc entre qui té la necessitat de prendre una decisió en un ambient d'incertesa i els que participen a la borsa per tal de guanyar diners i que estan disposats a córrer un risc

Moltes gràcies per la vostra atenció!