
DITMAE - Les matemàtiques de les poblacions

Taller - 12.03.2022

Noms:

1. Un cultiu de bacteris es reproduïx asexualment cada 50 minuts, és a dir, cada 50 minuts els bacteris es divideixen en dos. Si tenim inicialment 10 bacteris, quant temps ha de passar per tal de tenir 640 bacteris? [2 punts]

2. Un cert tipus d'algues creixen en un llac. S'ha comprovat que l'àrea del llac coberta per les algues es dobla cada dia. Si després de 20 dies la meitat de la superfície del llac està coberta per algues, quant de temps més ha de passar per tal que tota la superfície del llac estigui coberta? [3 punts]

3. Donada una població es defineix la *taxa de fertilitat* b com el número de naixements per individu i unitat de temps (número total de naixements entre número total d'individus). De la mateixa manera, es defineix la *taxa de mortalitat* d com el número de morts per individu per unitat de temps (número total de morts entre número total d'individus). Si diem x_n al nombre d'individus d'una població l'any n tindrem (recordeu l'equació de Malthus de la xerrada)

$$\begin{aligned}x_n &= x_{n-1} + bx_{n-1} - dx_{n-1} \\ &= (1 + b - d)x_{n-1} \\ &= rx_{n-1}\end{aligned}$$

on hem anomenat $r = 1 + b - d$.

- a) Si 20 individus d'una població total de 800 individus moren degut a una certa malaltia, quina és la taxa de mortalitat d'aquesta població?
[1 punt]
- b) Suposem que aquesta mateixa població augmenta de 800 individus a 1000 individus en un any, quin és el valor de r ? [1 punt]
- c) Suposant que els paràmetres anterior no canvien trobeu la taxa de fertilitat d'aquesta població i quants individus hi haurà en 20 anys (arrodoniu la darrera resposta a l'enter més proper). [1 punt + 1 punt]

4. Al fitxer d'excel `Model Malthusia-PoblacioIndia.xls` trobareu la població anual de l'Índia des del 1950 fins al 1999 i com s'ha fet servir el model de Malthus per ajustar les dades. A la fulla `Altres possibles casos`

- (a) Simuleu el comportament d'una població que segueix el model de Malthus amb $r=1.3$ i amb un individu inicialment.
- a1) Quant de temps ha de passar per tal que la població sigui superior a 10? I 100? I 1000? [1 punt + 1 punt+ 1 punt]

a2) Què noteu respecte la diferència entre aquests temps? Expliqueu per què passa això (us pot ajudar fer el gràfic). [2 punts]

(b) Simuleu el comportament d'una població que segueix el model de Malthus amb $r=0,7$ i amb 1000 individus inicialment.

b1) Quant de temps ha de passar per tal de tenir menys de la meitat de la població inicial? I per tenir menys d'una quarta part? [1 punt + 1 punt]

b2) Què passarà amb aquesta població a mesura que vagin passant els anys? [1 punt]

5. Obriu ara el fitxer `_Model LogísticLlevat.xls`. Veureu com es fa servir el model logístic per a ajustar dades de llevat. Recordeu que el model logístic ve donat per la següent equació

$$x_n = r \left(1 - \frac{x_{n-1}}{K} \right) x_{n-1}$$

on K és la capacitat del medi.

Suposem ara que una determinada població animal creix anualment seguint l'equació logística. Si anomenem p_n al número d'animals l'any n i suposant que el llindar per superpoblació és 100 es compleix

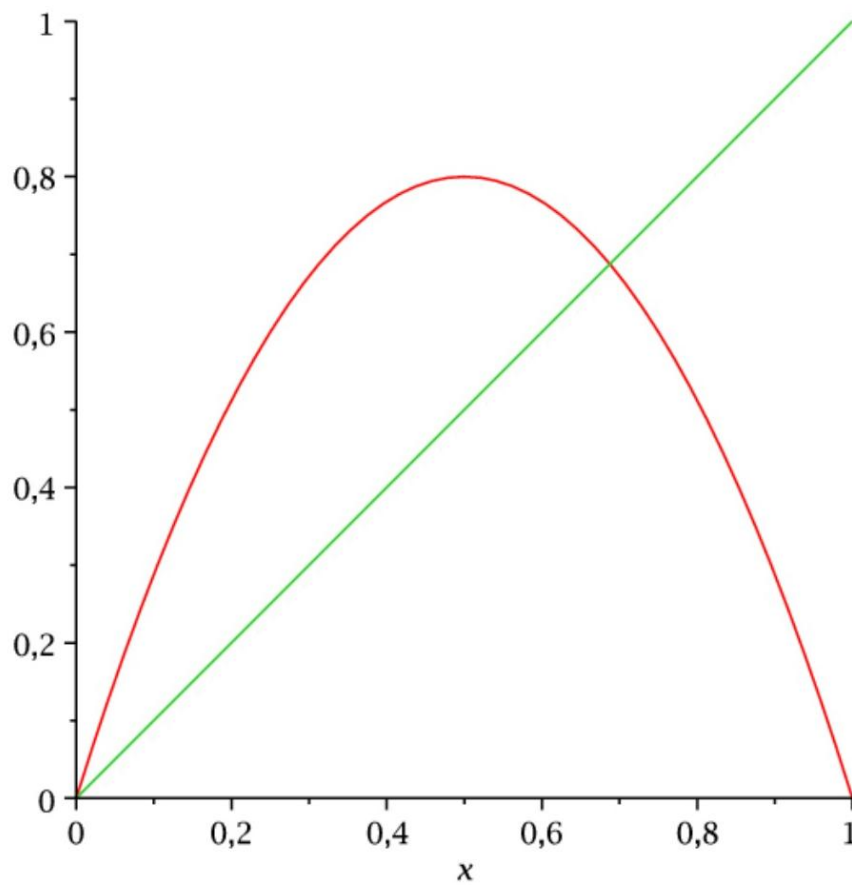
$$p_n = 3,2 \left(1 - \frac{p_{n-1}}{100} \right) p_{n-1}$$

Prenent $x_n = \frac{p_n}{100}$ tenim que x_n variarà entre 0 i 1 i complirà l'equació

$$x_n = 3,2 (1 - x_{n-1}) x_{n-1}$$

- a) Si inicialment la densitat de població és $x_0 = 0,35$ feu servir el full **Altres possibles casos** per a trobar els valors de la densitat de població fins a l'any 40. Entre quins dos valors oscil·la? (arrodoniu el resultat a 7 xifres significatives) [3 punts]

- b) Dibuixeu el diagrama de teranyina amb l'ajuda del gràfic següent que podeu fer servir de plantilla (dibuixeu com a mínim 8 punts) [3 punts]



6. Suposem que una població està modelitzada per l'equació

$$x_n = 2 \left(1 - \frac{x_{n-1}}{200000} \right) x_{n-1}$$

on x_n denota els *individus* l'any n . Trobeu una equació de la mateixa forma, descrivint el mateix model però amb la població mesurada en *milers d'individus*, és a dir per a la variable $y_n = \text{milers d'individus l'any } n$. [4 punts]

7. A la xerrada hem vist que, si coneixem el número reproductiu bàsic R_0 d'una certa malaltia, podem calcular la fracció de població que cal vacunar per tal de tenir immunitat de grup, p de la manera següent

$$p = 1 - \frac{1}{R_0}. \quad (1)$$

La tos ferina és una malaltia respiratòria, infecciosa i contagiosa aguda produïda pel bacteri *Bordetella pertussis*. S'estima que el seu número reproductiu bàsic R_0 és 5.5.

- a) Quin percentatge de la població caldria vacunar per tal de tenir immunitat de grup? [1 punt]

- b) Per tal d'obtenir (1) hem suposat que l'eficàcia de la vacuna és del 100%. Malauradament, això no sempre és així. En el cas de la tos ferina, la vacuna té una efectivitat del 85%. Tenint en compte això, quin seria realment el percentatge de la població que caldria vacunar per tal de tenir immunitat de grup? [2 punts]