Les matemàtiques de les poblacions

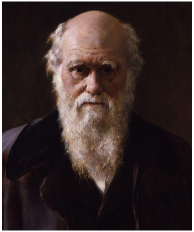
Sílvia Cuadrado (UAB)

Dissabte Transfronterer de les Matemàtiques a l'Alt Empordà

12 de març de 2022

Les matemàtiques i el món

L'Univers no es pot llegir fins que no hem après el seu llenguatge i ens hem familiaritzat amb els caràcters amb què està escrit. L'Univers està escrit en llenguatge matemàtic.
Galileu Galilei (1564-1642)



He lamentat profundament que no he avançat prou almenys per entendre alguna cosa dels grans principis de les matemàtiques, perquè els que sí que ho han fet semblen tenir un sentit extra.
Charles Darwin (1809-1882)

Les matemàtiques i el món

Un matemàtic és un cec en una habitació fosca buscant un gat negre que no hi és.

Charles Darwin? (1809-1882)

Les matemàtiques i la biologia

Matemàtiques $\rightarrow$ Física, Química, Enginyeria, Economia...

Biologia Matemàtica: Proporcionar mètodes matemàtics per a explicar fenòmens de la biologia.

Mathematics Is Biology's Next Microscope, Only Better; Biology Is Mathematics' Next Physics, Only Better. PLOS Biol 2(12), 2004.

Joel. E. Cohen
(Universitat de Columbia)

Any de la Biologia Matemàtica

2018: Any de la Biologia Matemàtica
10/10: Dia de la Biologia Matemàtica

Dinàmica de poblacions

Biologia Matemàtica: genètica, biologia cel.lular, biomedicina, neurociència...

Dinàmica de poblacions: Estudia com les poblacions canvien amb el temps (mida, composició...) així com els processos biològics i ambientals que provoquen aquests canvis (taxes de natalitat i mortalitat, migracions, recursos alimentaris...)

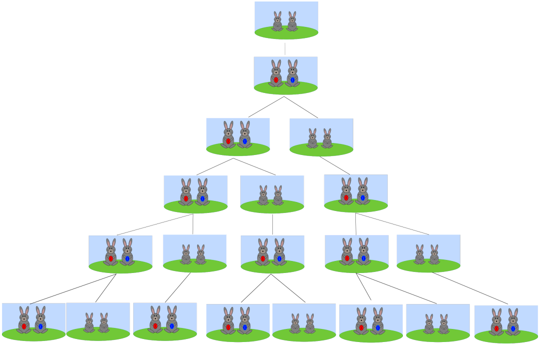
Dinàmica de poblacions

Biologia Matemàtica: genètica, biologia cel.lular, biomedicina, neurociència...

Dinàmica de poblacions: Estudia com les poblacions canvien amb el temps (mida, composició...) així com els processos biològics i ambientals que provoquen aquests canvis (taxes de natalitat i mortalitat, migracions, recursos alimentaris...)

Poblacions estructurades per l'edat. Fibonacci i els conills

Liber Abaci, 1202



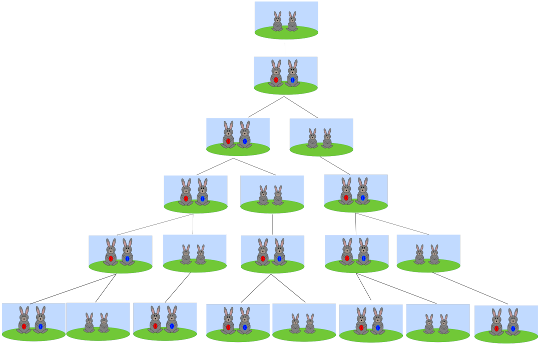
x_n=número de parelles de conills al començament del mes n

$x_0 = 1,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3,\ x_4 = 5\ldots$

$$x_{n+1} = x_n + x_{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, 4\ldots$$

Poblacions estructurades per l'edat. Fibonacci i els conills

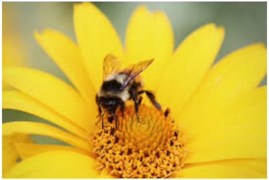
Liber Abaci, 1202

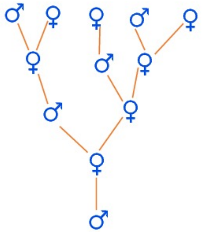


x_n=número de parelles de conills al començament del mes n
$x_0 = 1,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3,\ x_4 = 5...$

$$x_{n+1} = x_n + x_{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, 4...$$

Fibonacci i l'arbre genealògic d'un abellot

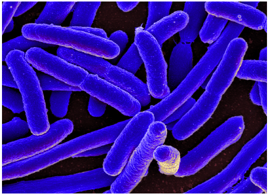




x_n=número d'abelles a la generació n
$x_0 = 1,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3,\ x_4 = 5\ldots$

$$x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$$

Bacteris



- Els bacteris són la forma de vida dominant del planeta.
- Fins fa poc la comunitat científica estimava que teníem 10 vegades més bacteris al cos que cèl.lules humanes.
- Recentment sembla que la ratio és 1:1.
  Mig bacteris mig humans!

Bacteris. Escherichia coli

- En bones condicions un bacteri “mare” típicament es divideix en dos bacteris “fills” de mida exactament la meïtat de la mare. Per tant cada bacteri fill ha de doblar la seva mida abans no pot dividir-se.
- Escherichia coli es divideix cada 20 minuts.
- Quants bacteris en funció del temps a partir d’un bacteri?

x_t = nombre de bacteris d’Escherichia coli a temps t (hores).
Suposem $x_0 = 1$
Passada una hora tenim

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 2^3 \cdot 1 = 8 \quad \text{bacteris.}$$

Passades dues hores tenim

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 2^{3*2} \cdot 1 = 64 \quad \text{bacteris}$$

Passades t hores tenim

$$2^{3t} \cdot 1 \quad \text{bacteris}$$

Bacteris. Escherichia coli

- En bones condicions un bacteri “mare” típicament es divideix en dos bacteris “fills” de mida exactament la meïtat de la mare. Per tant cada bacteri fill ha de doblar la seva mida abans no pot dividir-se.
- Escherichia coli es divideix cada 20 minuts.
- Quants bacteris en funció del temps a partir d'un bacteri?

x_t = nombre de bacteris d'Escherichia coli a temps t (hores).
Suposem $x_0 = 1$
Passada una hora tenim

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 2^3 \cdot 1 = 8 \quad \text{bacteris.}$$

Passades dues hores tenim

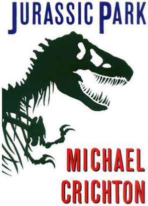
$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 2^{3*2} \cdot 1 = 64 \quad \text{bacteris}$$

Passades t hores tenim

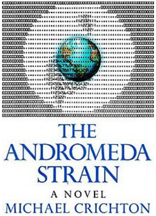
$$2^{3t} \cdot 1 \quad \text{bacteris}$$

The Andromeda Strain

Michael Crichton (1942-2008)

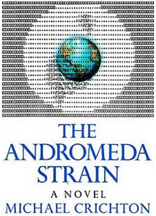


(1990)



(1969)

The Andromeda Strain



(1969)

(1971)

(2008)

Una nau extraterrestre aterra en un poble de Nou Mexico. Una soca bacteriana desconeguda a la Terra escapa de la nau i comença a infectar i matar tothom al poble. Un equip de científics s'uneixen per eliminar el bacteri abans que s'estengui a tot el país

The Andromeda Strain

The mathematics of uncontrolled growth are frightening. A single cell of the bacterium E. coli would, under ideal circumstances, divide every twenty minutes. That is not particularly disturbing until you think about it, but the fact is that bacteria multiply geometrically: one becomes two, two become four, four become eight, and so on. In this way it can be shown that in a single day, one cell of E. coli could produce a super-colony equal in size and weight to the entire planet Earth

This never happens, for a perfectly simple reason: growth cannot continue indefinitely under "ideal circumstances". Food runs out.

The Andromeda Strain

The mathematics of uncontrolled growth are frightening. A single cell of the bacterium E. coli would, under ideal circumstances, divide every twenty minutes. That is not particularly disturbing until you think about it, but the fact is that bacteria multiply geometrically: one becomes two, two become four, four become eight, and so on. In this way it can be shown that in a single day, one cell of E. coli could produce a super-colony equal in size and weight to the entire planet Earth

This never happens, for a perfectly simple reason: growth cannot continue indefinitely under "ideal circumstances". Food runs out.

The Andromeda Strain

Tenia raó Michael Crichton en la seva primera afirmació?

Nombre de bacteris a temps t si comencem amb 1 bacteri

$$2^{3\cdot t} \cdot 1$$

Passades 24 hores tenim

$$2^{3\cdot 24} \cdot 1 \quad \text{bacteris}$$

Massa bacteri Escherichia coli $\approx 10^{-12}$ grams.
Massa colònia bacteris en un dia

$$10^{-12} \cdot 2^{3\cdot 24} \approx 4.7 \cdot 10^{9} \quad \text{grams}$$

Massa Terra $\approx 6 \cdot 10^{27}$ grams!

The Andromeda Strain

Tenia raó Michael Crichton en la seva primera afirmació?

Nombre de bacteris a temps t si comencem amb 1 bacteri

$$2^{3\cdot t}\cdot 1$$

Passades 24 hores tenim

$$2^{3\cdot 24}\cdot 1 \quad \text{bacteris}$$

Massa bacteri Escherichia coli $\approx 10^{-12}$ grams.
Massa colònia bacteris en un dia

$$10^{-12}\cdot 2^{3\cdot 24}\approx 4.7\cdot 10^{9} \quad \text{grams}$$

Massa Terra $\approx 6\cdot 10^{27}$ grams!

The Andromeda Strain

Tenia raó Michael Crichton en la seva primera afirmació?

Nombre de bacteris a temps t si comencem amb 1 bacteri

$$2^{3\cdot t}\cdot 1$$

Passades 24 hores tenim

$$2^{3\cdot 24}\cdot 1 \quad \text{bacteris}$$

Massa bacteri Escherichia coli $\approx 10^{-12}$ grams.
Massa colònia bacteris en un dia

$$10^{-12}\cdot 2^{3\cdot 24}\approx 4.7\cdot 10^{9} \quad \text{grams}$$

Massa Terra $\approx 6\cdot 10^{27}$ grams!

The Andromeda Strain

Tenia raó Michael Crichton en la seva primera afirmació?

Nombre de bacteris a temps t si comencem amb 1 bacteri

$$2^{3 \cdot t} \cdot 1$$

Passades 24 hores tenim

$$2^{3 \cdot 24} \cdot 1 \quad \text{bacteris}$$

Massa bacteri Escherichia coli $\approx 10^{-12}$ grams.
Massa colònia bacteris en un dia

$$10^{-12} \cdot 2^{3 \cdot 24} \approx 4.7 \cdot 10^{9} \quad \text{grams}$$

Massa Terra $\approx 6 \cdot 10^{27}$ grams!

The Andromeda Strain

Quantes hores haurien de passar perquè l'afirmació de l'escriptor fos correcta?

massa bacteris en t hores $\rightarrow 10^{-12} \cdot 2^{3t} = 6 \cdot 10^{27} \leftarrow$ massa Terra

$$2^{3t} = 6 \cdot 10^{39}$$

$$\ln(2^{3t}) = \ln(6 \cdot 10^{39})$$

$$3t \cdot \ln(2) = \ln(6 \cdot 10^{39})$$

$$t = \frac{1}{3}\frac{\ln(6 \cdot 10^{39})}{\ln(2)} \approx 44 \quad \text{hores}$$

The Andromeda Strain

Quantes hores haurien de passar perquè l'afirmació de l'escriptor fos correcta?

massa bacteris en t hores $\rightarrow 10^{-12} \cdot 2^{3t} = 6 \cdot 10^{27} \leftarrow$ massa Terra

$$2^{3t} = 6 \cdot 10^{39}$$

$$\ln(2^{3t}) = \ln(6 \cdot 10^{39})$$

$$3t \cdot \ln(2) = \ln(6 \cdot 10^{39})$$

$$t = \frac{1}{3}\frac{\ln(6 \cdot 10^{39})}{\ln(2)} \approx 44 \quad \text{hores}$$

Creixement de poblacions humanes. Euler

Leonhard Euler (1707-1783)
Introductio in analysin infinitorum, 1748.

Si la població d'una certa regió augmenta anualment en una trentena part i inicialment hi havia 100.000 habitants, quina serà la població després de 100 anys?

Població amb creixement geomètric : x_n = nombre d'individus l'any n

$$x_n = x_{n-1} + \frac{1}{30}x_{n-1} = \left(1 + \frac{1}{30}\right)x_{n-1}$$

$$x_{n-1} = \left(1 + \frac{1}{30}\right)x_{n-2} \Longrightarrow x_n = \left(1 + \frac{1}{30}\right)^2 x_{n-2} \dots$$

$$\Longrightarrow x_n = \left(1 + \frac{1}{30}\right)^n x_0 \Longrightarrow x_{100} = \left(1 + \frac{1}{30}\right)^{100} 100.000$$

Creixement de poblacions humanes. Euler

Leonhard Euler (1707-1783)
Introductio in analysin infinitorum, 1748.

Si la població d'una certa regió augmenta anualment en una trentena part i inicialment hi havia 100.000 habitants, quina serà la població després de 100 anys?

Població amb creixement geomètric : $x_n =$ nombre d'individus l'any n

$$x_n = x_{n-1} + \frac{1}{30}x_{n-1} = \left(1 + \frac{1}{30}\right) x_{n-1}$$

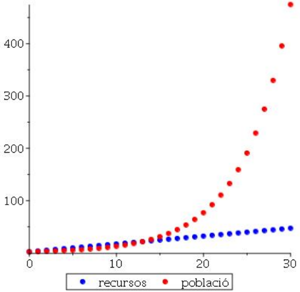
$$x_{n-1} = \left(1 + \frac{1}{30}\right) x_{n-2} \Longrightarrow x_n = \left(1 + \frac{1}{30}\right)^2 x_{n-2} \ldots$$

$$\Longrightarrow x_n = \left(1 + \frac{1}{30}\right)^n x_0 \Longrightarrow x_{100} = \left(1 + \frac{1}{30}\right)^{100} 100.000$$

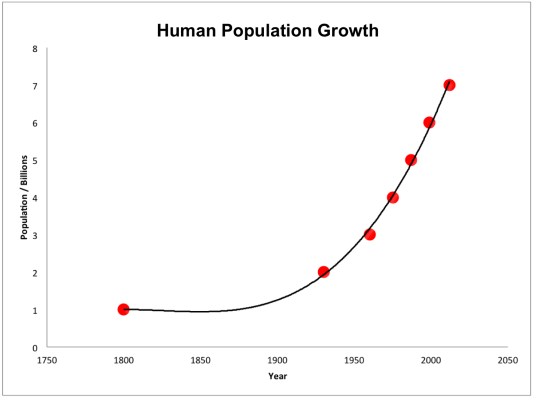
Model de Malthus

Thomas Malthus (1766-1834)
An Essay on the Principle of Population, 1798.

La població creix de manera geomètrica (o exponencial) mentre que els recursos necessaris per donar suport a la població creixen de manera aritmètica el que dóna lloc al que s'ha conegut com "catàstrofe malthusiana".



Model de Malthus

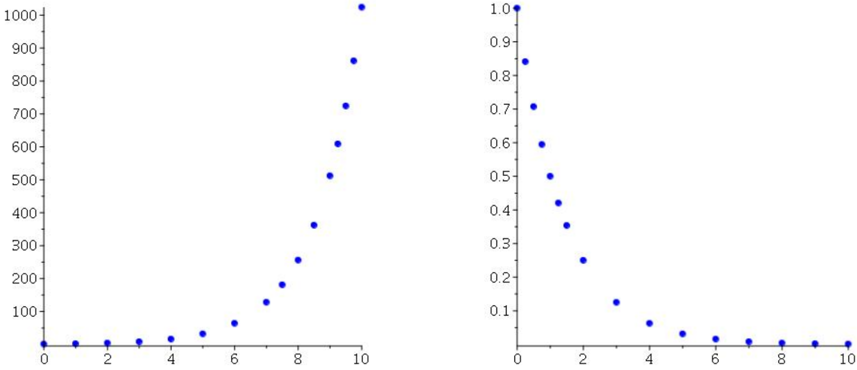


Gran canvi a partir de la revolució industrial: mentre la població mundial va trigar fins l'any 1800 a arribar als 1000 milions, es van arribar als 2000 en nomes 130 anys (1930), als 3000 en 30 més (1960), als 4000 en 15 més (1974) i als 5000 en 13 més (1987).

Model de Malthus

$$\color{red}{x_n = r x_{n-1}} \Longrightarrow x_n = r^2 x_{n-2} \Longrightarrow x_n = r^3 x_{n-3} \Longrightarrow \ldots \Longrightarrow \color{red}{x_n = r^n x_0}$$

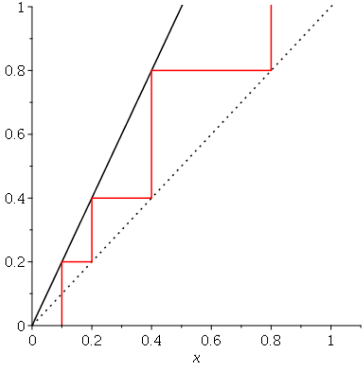
r coeficient o constant de Malthus



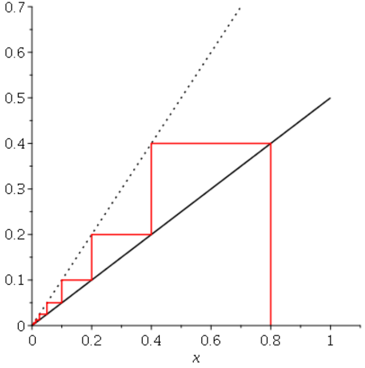
$r > 1$ $\qquad$ $r < 1$

Model de Malthus. Gràfic de teranyina

$x_n = rx_{n-1}$
Diem $f(x) := rx$
x_0, $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$,..., $x_n = f(x_{n-1})$



$r > 1$, $x_0 = 0.1$



$r < 1$, $x_0 = 0.8$

Població mundial. Model de Malthus

Entre els anys 2000 i 2005 la població mundial va créixer a una taxa anual de 1.25% (http://www.worldometers.info/world-population/). És a dir

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1}} = 0.0125 \Longrightarrow \begin{aligned} x_n &= x_{n-1} + 0.0125x_{n-1} \\ &= 1.0125x_{n-1} \end{aligned}$$

Tenim doncs el model de Malthus amb $r = 1.0125$

$$x_n = 1.0125x_{n-1} \Longrightarrow x_n = (1.0125)^n x_0$$

Considerem com a població inicial la població l'any 2000

$$x_0 = 6145 \cdot 10^6$$

i apliquem el model més enllà de l'any 2005

Població mundial. Model de Malthus

Entre els anys 2000 i 2005 la població mundial va créixer a una taxa anual de 1.25% (http://www.worldometers.info/world-population/). És a dir

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1}} = 0.0125 \Longrightarrow \begin{aligned} x_n &= x_{n-1} + 0.0125 x_{n-1} \\ &= 1.0125 x_{n-1} \end{aligned}$$

Tenim doncs el model de Malthus amb $r = 1.0125$

$$x_n = 1.0125 x_{n-1} \Longrightarrow x_n = (1.0125)^n x_0$$

Considerem com a població inicial la població l'any 2000

$$x_0 = 6145 \cdot 10^6$$

i apliquem el model més enllà de l'any 2005

Població mundial.Model de Malthus

$$x_n = (1.0125)^n(6145 \cdot 10^6)$$

Any 2005: $x_5 = (1.0125)^5(6145 \cdot 10^6) \approx 6539 \cdot 10^6$ (Real $6542 \cdot 10^6$)

Any 2010: $x_{10} = (1.0125)^{10}(6145 \cdot 10^6) \approx 6958 \cdot 10^6$ (Real $6958 \cdot 10^6$)

Any 2018 $x_{18} = (1.0125)^{18}(6145 \cdot 10^6) \approx 7685 \cdot 10^6$ (Real $7632 \cdot 10^6$)

Any 2022 $x_{22} = (1.0125)^{22}(6145 \cdot 10^6) \approx 8076 \cdot 10^6$ (Real $7927 \cdot 10^6$)

Any 2100 $x_{100} = (1.0125)^{100}(6145 \cdot 10^6) \approx 21283 \cdot 10^6$ (Real ?)

Any 2900 $x_{900} = (1.0125)^{900}(6145 \cdot 10^6) \approx 409 \cdot 10^{12}$ (Real ?)
Superfície terrestre : $148,94 \cdot 10^{12} m^2$ 3 persones per m^2!

Població mundial.Model de Malthus

Població mundial.Model de Malthus

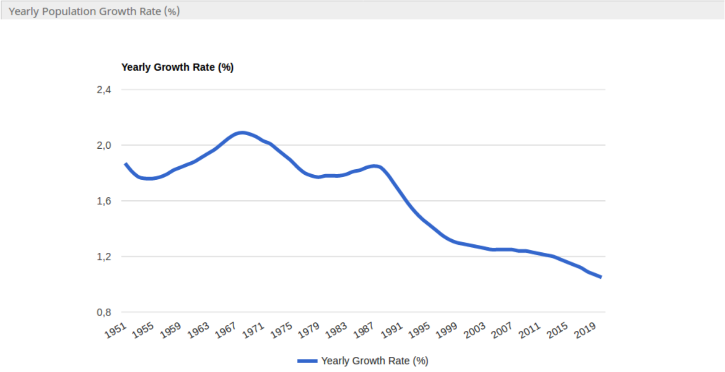


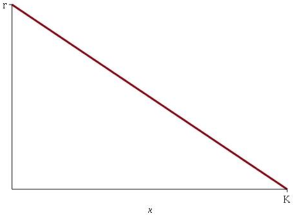
Figure: http://www.worldometers.info/world-population/

Model de Malthus: Bona aproximació per a escales de temps curt, poc realista a escales de temps llarg.
Taxa de creixement: decreix amb la mida de la població

Els límits del creixement. Model de Verhulst

Pierre Verhulst (1804-1849)
Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement, 1838.

Malthus: $x_n = rx_{n-1}$



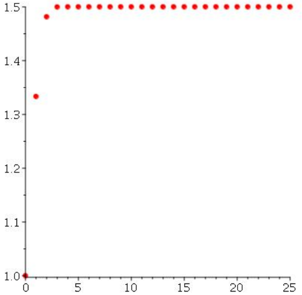
Verhulst: $r(x) = r(1 - \frac{x}{K})$
K capacitat del medi

Model del Verhulst (Equació logística)

$$x_n = r\left(1 - \frac{x_{n-1}}{K}\right)x_{n-1}$$

Equació logística

$$x_n = r\left(1 - \frac{x_{n-1}}{K}\right)x_{n-1}, \quad r = 2, K = 3 \Longrightarrow \begin{array}{l} x_n = 2\left(1 - \frac{x_{n-1}}{3}\right)x_{n-1} \\ x_0 = 1 \end{array}$$

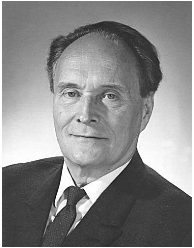


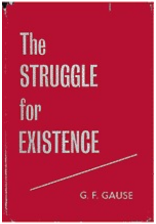
$$x_n = x_{n-1} \iff 2\left(1 - \frac{x_{n-1}}{3}\right) = 1$$

$$\iff x_{n-1} = \frac{3}{2}$$

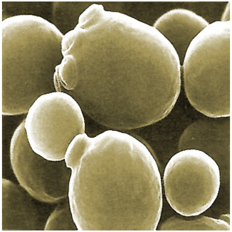
Corba de creixement sigmoidea.

Equació logística





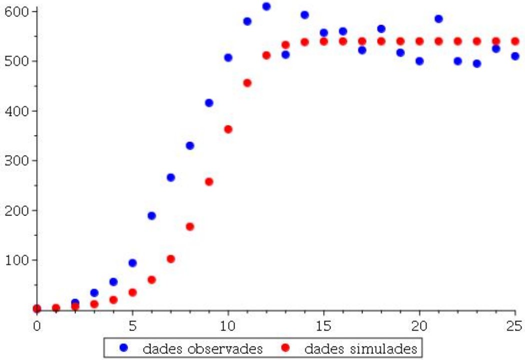
Georgii Frantsevich Gause
(1910-1986)



Saccharomyces cerevisiae

Paramecium Aurelia

Equació logística

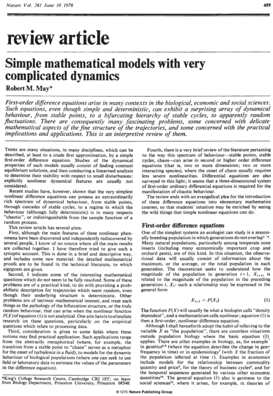


Dades observades: Densitat de Paramecium Aurelia (nombre d'individus per $0.5cm^3$) (Gause)
Dades simulades: Equació logística $r = 1.783$, $K = 1229.655172$

Equació logística

$$x_n = r\left(1 - \frac{x_{n-1}}{K}\right)x_{n-1}$$

Robert May
(Oxford University)



Nature Vol. 261 June 10 1976 459

review article

Simple mathematical models with very complicated dynamics

Robert M. May*

First-order difference equations arise in many contexts in the biological, economic and social sciences. Such equations, even though simple and deterministic, can exhibit a surprising array of dynamical behaviour, from stable points, to a bifurcating hierarchy of stable cycles, to apparently random fluctuations. There are consequently many fascinating problems, some concerned with delicate mathematical aspects of the fine structure of the trajectories, and some concerned with the practical implications and applications. This is an interpretive review of them.

THERE are many situations, in many disciplines, which can be described, at least to a crude first approximation, by a simple first-order difference equation. Studies of the dynamical properties of such models usually consist of finding constant equilibrium solutions, and then conducting a linearised analysis to determine their stability with respect to small disturbances: explicitly nonlinear dynamical features are usually not considered.

Recent studies have, however, shown that the very simplest nonlinear difference equations can possess an extraordinarily rich spectrum of dynamical behaviour, from stable points, through cascades of stable cycles, to a regime in which the behaviour (although fully deterministic) is in many respects "chaotic", or indistinguishable from the sample function of a random process.

This review article has several aims.

First, although the main features of these nonlinear phenomena have been discovered and independently rediscovered by several people, I know of no source where all the main results are collected together. I have therefore tried to give such a synoptic account. This is done in a brief and descriptive way, and includes some new material: the detailed mathematical proofs are to be found in the technical literature, to which signposts are given.

Second, I indicate some of the interesting mathematical questions which do not seem to be fully resolved. Some of these problems are of a practical kind, to do with providing a probabilistic description for trajectories which seem random, even though their underlying structure is deterministic. Other problems are of intrinsic mathematical interest, and treat such things as the pathology of the bifurcation structure, or the truly random behaviour, that can arise when the nonlinear function $F(X)$ of equation (1) is not analytical. One aim here is to stimulate research on these questions, particularly on the empirical questions which relate to processing data.

Third, consideration is given to some fields where these notions may find practical application. Such applications range from the abstractly metaphorical (where, for example, the transition from a stable point to "chaos" serves as a metaphor for the onset of turbulence in a fluid), to models for the dynamic behaviour of biological populations (where one can seek to use field or laboratory data to estimate the values of the parameters in the difference equation).

*King's College Research Centre, Cambridge CB2 1ST; on leave from Biology Department, Princeton University, Princeton 08540.

Fourth, there is a very brief review of the literature pertaining to the way this spectrum of behaviour—stable points, stable cycles, chaos—can arise in second or higher order difference equations (that is, two or more dimensions; two or more interacting species), where the onset of chaos usually requires less severe nonlinearities. Differential equations are also surveyed in this light; it seems that a three-dimensional system of first-order ordinary differential equations is required for the manifestation of chaotic behaviour.

The review ends with an evangelical plea for the introduction of these difference equations into elementary mathematics courses, so that students' intuition may be enriched by seeing the wild things that simple nonlinear equations can do.

First-order difference equations

One of the simplest systems an ecologist can study is a seasonally breeding population in which generations do not overlap[1–4]. Many natural populations, particularly among temperate zone insects (including many economically important crop and orchard pests), are of this kind. In this situation, the observational data will usually consist of information about the maximum, or the average, or the total population in each generation. The theoretician seeks to understand how the magnitude of the population in generation $t+1$, X_{t+1}, is related to the magnitude of the population in the preceding generation t, X_t: such a relationship may be expressed in the general form

$$X_{t+1} = F(X_t) \qquad (1)$$

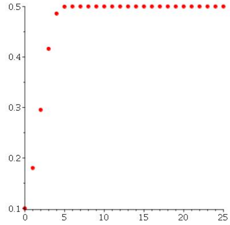
The function $F(X)$ will usually be what a biologist calls "density dependent", and a mathematician calls nonlinear; equation (1) is then a first-order, nonlinear difference equation.

Although I shall henceforth adopt the habit of referring to the variable X as "the population", there are countless situations outside population biology where the basic equation (1) applies. There are other examples in biology, as, for example in genetics[5,6] (where the equation describes the change in gene frequency in time) or in epidemiology[7] (with X the fraction of the population infected at time t). Examples in economics include models for the relationship between commodity quantity and price[8], for the theory of business cycles[9], and for the temporal sequences generated by various other economic quantities[10]. The general equation (1) also is germane to the social sciences[11], where it arises, for example, in theories of

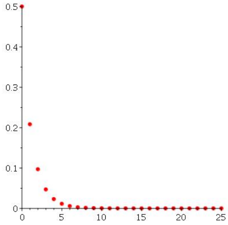
©1976 Nature Publishing Group

Equació logística

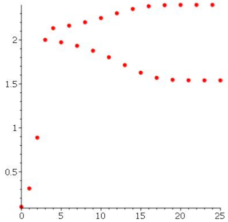
$$x_n = r\left(1 - \frac{x_{n-1}}{3}\right)x_{n-1}$$



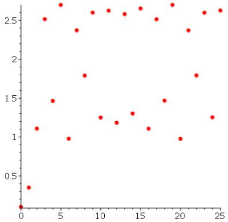
$r = 2$



$r = 0.5$



$r = 3.2$



$r = 3.6$

Equació logística

Mirem gràficament aquests comportaments tan diferents

$$x_n = r\left(1 - \frac{x_{n-1}}{K}\right)x_{n-1}$$

Multiplicant per $\frac{1}{K}$ i dient $y_n := \frac{x_n}{K}$

$$y_n = r\left(1 - y_{n-1}\right)y_{n-1}$$

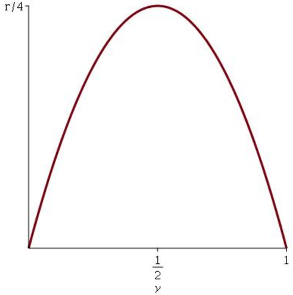
Diem

$$\begin{aligned} f(y) &:= r(1-y)y \\ &= ry - ry^2 \end{aligned}$$

y_0, $y_1 = f(y_0)$, $y_2 = f(y_1)$,...

$$y_n = f(y_{n-1})$$

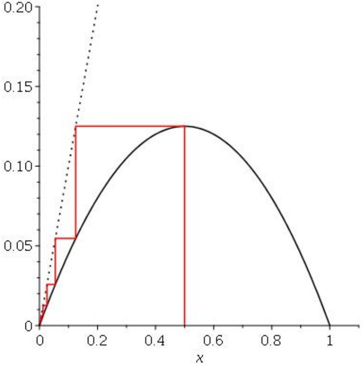
$y_n > 0 \iff 0 < f(y_{n-1}) < 1 \iff 0 < r < 4$

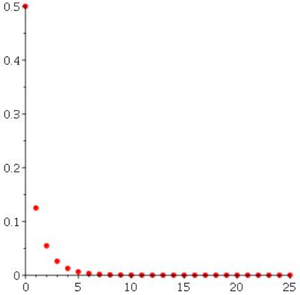


Equació logística. Extinció

$$y_n = r\,(1 - y_{n-1})\,y_{n-1}$$

$r = 0.5,\ x_0 = 0.5$

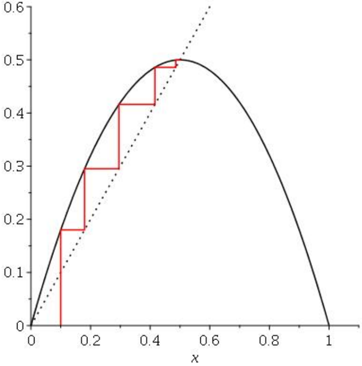


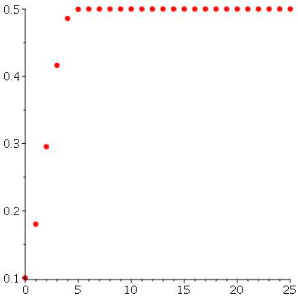


Equació logística. Convergència a l'equilibri

$$y_n = r\,(1 - y_{n-1})\,y_{n-1}$$

$r = 2,\ x_0 = 0.1$

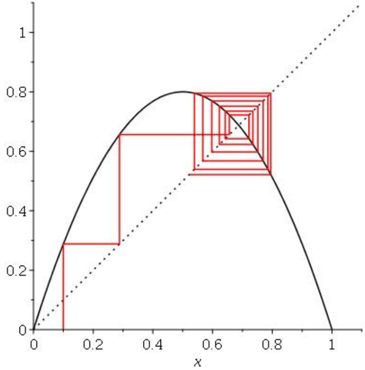


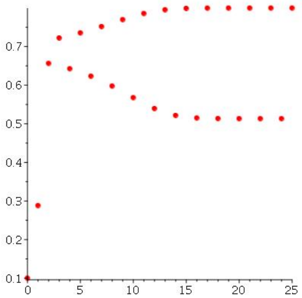


Equació logística. Solució periòdica

$$y_n = r\,(1 - y_{n-1})\,y_{n-1}$$

$r = 3.2,\ x_0 = 0.1$

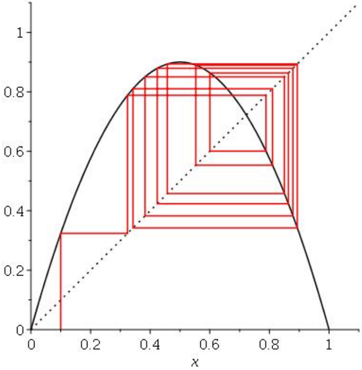


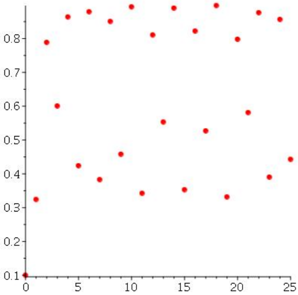


Equació logística. Caos

$$y_n = r\,(1 - y_{n-1})\,y_{n-1}$$

$r = 3.6,\ x_0 = 0.1$





Caos a la Natura

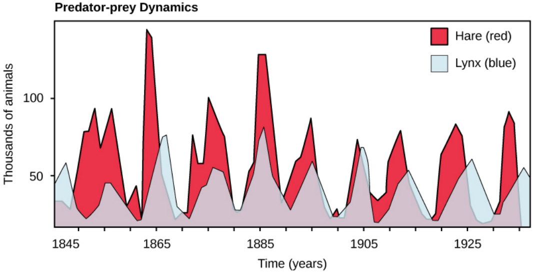
Experiments al laboratori

Escarabat de la farina
(*Tribolium Castaneum*)

Moscardes
(*Lucilia Cuprina*)

Preses i Depredadors

Població de linx (Canadian lynx) i llebres (snowshoe hare)



Dades de la Hudson Bay Company
"Booms and Busts"

Lotka i Volterra

Alfred Lotka (1880-1949)

Vito Volterra (1860-1940)

Model Lotka-Volterra

x_n = nombre de preses l'any n,
y_n = nombre de depredadors l'any n

$$x_n = rx_{n-1}$$

$$y_n = \mu y_{n-1}$$

$r > 1$, $0 < \mu < 1$

Llei d'acció de masses: nombre de trobades entre preses i depredadors és proporcional al producte de les respectives poblacions.

$$\begin{cases} x_n = rx_{n-1} - ax_{n-1}y_{n-1} \\ y_n = \mu y_{n-1} + \alpha a x_{n-1} y_{n-1} \end{cases}$$

Model Lotka-Volterra

$x_n =$ nombre de preses l'any n,
$y_n =$ nombre de depredadors l'any n

$$x_n = rx_{n-1}$$

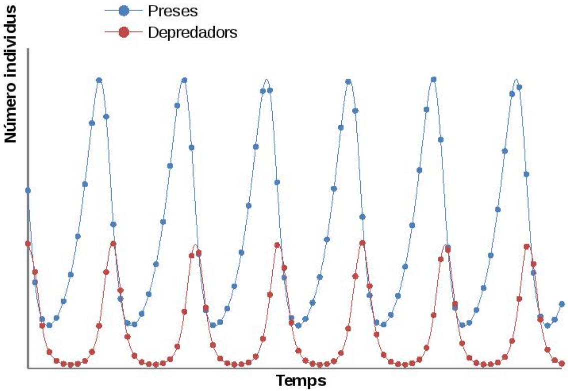
$$y_n = \mu y_{n-1}$$

$r > 1$, $0 < \mu < 1$
Llei d'acció de masses: nombre de trobades entre preses i depredadors és proporcional al producte de les respectives poblacions.

$$\begin{cases} x_n &= rx_{n-1} - ax_{n-1}y_{n-1} \\ y_n &= \mu y_{n-1} + \alpha a x_{n-1} y_{n-1} \end{cases}$$

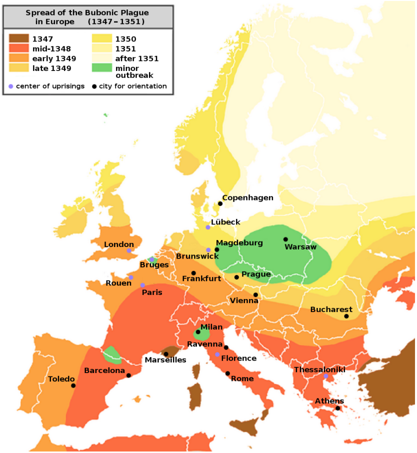
Model Lotka-Volterra

$$\begin{cases} x_n &= rx_{n-1} - ax_{n-1}y_{n-1} \\ y_n &= \mu y_{n-1} + \alpha a x_{n-1}y_{n-1} \end{cases}$$



Epidèmies

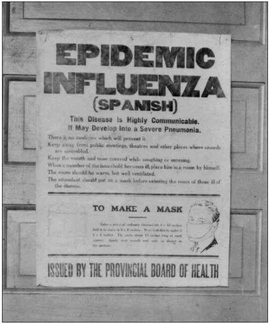
Pesta Negra (*Black Death*)

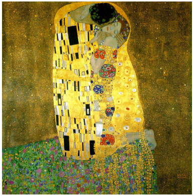


Provocà la mort d'aproximadament un terç de la població europea

Epidèmies

Grip Espanyola (1918)
Més de 50 milions de morts

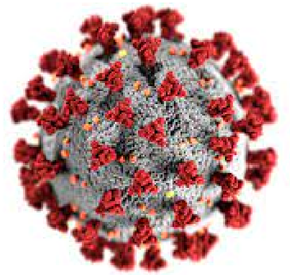



Gustav Klimt (1862-1918)


Egon Schiele (1890-1918)

Epidèmies

Covid 19



Epidèmies

- Epidèmies anuals de grip
- Malalties endèmiques (sempre presents): tifus, malària, còlera, xarampió...

Epidemiòlegs: entendre les causes de la malaltia, predir el seu comportament i desenvolupar maneres de controlar-la.

Epidèmies

Models matemàtics : Bernoulli (verola, 1760), Ross (malària, 1911), Kermack i McKendrick (models compartamentals, 1927).
Ross, Kermack i McKendrick: Mesura del potencial de transmissió d'una malaltia.

R_0= Nombre mitjà de noves infeccions que cada persona infectada produeix en una població de susceptibles.

- $R_0 > 1$ cada cas primari produeix més d'un cas secundari $\longrightarrow$ epidèmia
- $R_0 < 1$ cada cas primari produeix menys d'un cas secundari $\longrightarrow$ la malatia hauria de desaparèixer

Epidèmies

Models matemàtics : Bernoulli (verola, 1760), Ross (malària, 1911), Kermack i McKendrick (models compartamentals, 1927).
Ross, Kermack i McKendrick: Mesura del potencial de transmissió d'una malaltia.

R_0= Nombre mitjà de noves infeccions que cada persona infectada produeix en una població de susceptibles.

- $R_0 > 1$ cada cas primari produeix més d'un cas secundari $\longrightarrow$ epidèmia
- $R_0 < 1$ cada cas primari produeix menys d'un cas secundari $\longrightarrow$ la malatia hauria de desaparèixer

Epidèmies

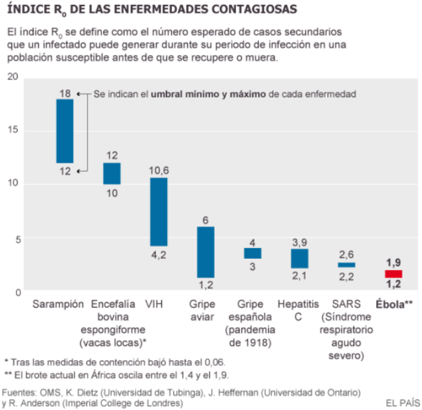
Models matemàtics : Bernoulli (verola, 1760), Ross (malària, 1911), Kermack i McKendrick (models compartamentals, 1927).
Ross, Kermack i McKendrick: Mesura del potencial de transmissió d'una malaltia.

R_0= Nombre mitjà de noves infeccions que cada persona infectada produeix en una població de susceptibles.

- $R_0 > 1$ cada cas primari produeix més d'un cas secundari $\longrightarrow$ epidèmia
- $R_0 < 1$ cada cas primari produeix menys d'un cas secundari $\longrightarrow$ la malatia hauria de desaparèixer

Epidèmies

Alguns valors de R_0 (Diari *El Pais* 8/10/14)

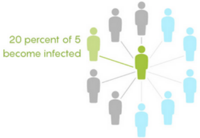


Covid 19: 2-3 (inici), 5-7 (delta)

Vacunació. Immunitat de grup (*Herd Immunity*)

Vacunes donen immunitat+"majoria" de la població vacunada= la comunitat està protegida contra la propagació de la epidèmia.
Per a controlar l' epidèmia amb la vacunació no cal que es vacuni tota la població (immunitat de grup).

Quants individus cal vacunar per tal que la R_0 efectiva := R_e sigui més petita que 1?



$R_0 = 2,\ R_e = 1$

Imatge: quantamagazine

Vacunació. Immunitat de grup (*Herd Immunity*)

p= fracció població vacunada ($= \frac{\text{número vacunats}}{\text{total població}}$)
$1 - p$ = fracció població encara susceptible
$R_e = R_0(1 - p)$
Volem

$$R_0(1-p) < 1 \iff p > 1 - \frac{1}{R_0}$$

Llindar immunitat de grup

$$p = 1 - \frac{1}{R_0}$$

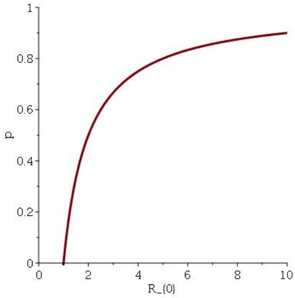
Vacunació. Immunitat de grup (*Herd Immunity*)

p= fracció població vacunada ($= \frac{\text{número vacunats}}{\text{total població}}$)
$1 - p$ = fracció població encara susceptible
$R_e = R_0(1-p)$
Volem

$$R_0(1-p) < 1 \iff p > 1 - \frac{1}{R_0}$$

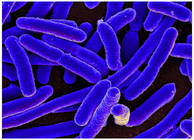
Llindar immunitat de grup

$$p = 1 - \frac{1}{R_0}$$



Vacunació. Immunitat de grup (*Herd Immunity*)

Malaltia	R_0	**Vacunació**
Xarampió	12-18	92-95%
Verola	5-7	80-86%
Grip (1918)	3-4	67-75%
Ebola	1.2-1.9	17-47%
Covid (Inici)	2-3	50-67%
Covid (Delta)	5-7	80-86%



Gràcies per la vostra atenció